Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 13

73. Para cada número natural k, llamemos $i(k)$ al mayor divisor impar de k. Dado entonces un número natural n, hay que calcular

$$i(n+1) + i(n+2) + i(n+3) + \ldots + i(2n).$$

Solución.

Denotemos $S(n) = i(n+1) + \ldots + i(2n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Probaremos por inducción que $S(n) = n^2$.

$S(1) = i(2) = 1$, $S(2) = i(3) + i(4) = 3 + 1 = 4 = 2^2$.

Supongamos que para un $n \geq 1$ es $S(n) = n^2$. Entonces, aplicando esta hipótesis,

$$\begin{aligned} S(n+1) &= i(n+2) + \ldots + i(2n) + i(2n+1) + i(2n+2) \\ &= n^2 - i(n+1) + i(2n+1) + i(2n+2) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado que $i(2n+2) = i(n+1)$ (el mayor divisor impar de $2n+2 = 2(n+1)$ es el mismo que el de $n+1$) y que $i(2n+1) = 2n+1$ (ya que $2n+1$ es un número impar).

74. Sean f una función decreciente en $(0, 1)$ y x, y, z tres puntos de dicho intervalo. Hay que probar que entonces

$$\frac{xf(x) + yf(y) + zf(z)}{x + y + z} \leq \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3}.$$

Solución.

Supongamos $x \leq y \leq z$, lo cual implica por la hipótesis que $f(x) \geq f(y) \geq f(z)$. Entonces, es obvia la siguiente desigualdad:

$$(z - x)(f(x) - f(z)) + (y - x)(f(x) - f(y)) + (z - y)(f(y) - f(z)) \geq 0$$

de donde, desarrollando, resulta

$$(y + z - 2x)f(x) + (x + z - 2y)f(y) + (x + y - 2z)f(z) \geq 0,$$

que es una desigualdad inmediatamente equivalente a la propuesta.

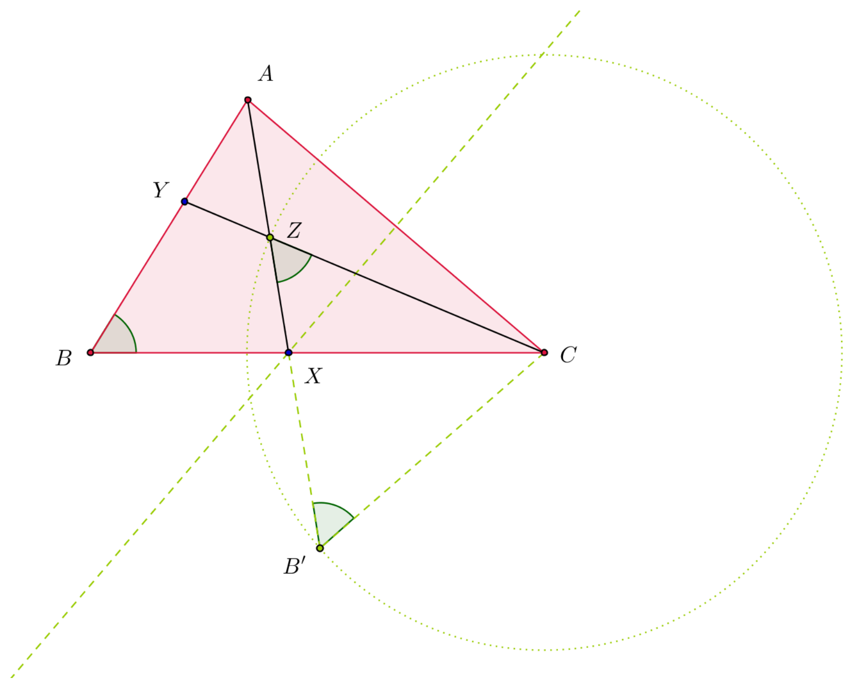
75. En los lados de un triángulo ABC elegimos dos puntos:

- X en BC, de forma que $AX = XC$,
- Y en AB, tal que Z es la intersección de CY con AX, y $CZ = AB$.

Se trata de probar que B, X, Z e Y están en una misma circunferencia.

Solución.

El punto X pertenece a la mediatriz del lado AC. Si B' es el simétrico del punto B respecto de esta mediatriz, las rectas AB' y BC se cortan en X (figura).



La circunferencia de centro C y radio CB' corta al segmento AX en el punto Z (así se puede construir el punto Z). El triángulo $CB'Z$ es isósceles y $\angle XZC = \angle CB'X = \angle XBA$.

Entonces $\angle YZX + \angle YBX = 180°$, y el cuadrilátero $YZXB$ es cíclico.

76. Tenemos nueve puntos en la superficie de un tetraedro regular cuya arista mide 1 cm. Se pide demostrar que al menos dos de ellos distan entre sí no más de 0,5 cms.

Solución.

Se puede considerar partida la superficie del tetraedro en 16 triángulos equiláteros congruentes al dividir cada cara uniendo los puntos medios de las aristas. Ahora podemos considerar que la superficie del tetraedro está compuesta de 8 regiones: cada uno de los triángulos centrales que han quedado trazados en cada cara y los cuatro tetraedros pequeños "sin base" que se han formado, uno en cada vértice del tetraedro original. Por el principio del palomar debe haber al menos dos puntos al menos en una de estas 8 regiones. Pero la distancia máxima entre dos puntos en una cualquiera de esta regiones es 0.5 cm.

77. Hay seis trozos de queso, con pesos diferentes entre sí, de modo que a simple vista sabemos distinguir, dados dos cualesquiera de ellos, cuál es el que más pesa. Nos dicen que el peso conjunto de tres de ellos es el mismo que el de los otros tres. ¿Cómo podemos averiguar cuáles son dichos grupos de tres trozos con solamente dos pesadas en una balanza?

Solución.

Podemos ordenar los trozos de queso de acuerdo con su peso, así que podemos representar los trozos por los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de más ligero a más pesado.

Los únicos agrupamientos posibles entre ternas que puedan equilibrarse son los siguientes: $(126, 345)$, $(136, 245)$, $(146, 235)$, $(156, 234)$ y $(236, 145)$.

Primero se pesa la terna 146 contra la terna 235. Si quedan equilibradas, fin. Si la 146 pesa más, entonces también la 156 pesará más que la 234. Entonces pesamos 136 contra

245. Si hay equilibrio, fin. Si la 136 pesa más, entonces también la 236 pesará más que la 145, y entonces el equilibrio se dará entre las ternas 126 y 345.

Si, en la primera pesada, la 146 es más ligera, entonces la 136 también será más ligera que la 245, la 126 más ligera que la 345 y la 145 más ligera que la 236. Luego las ternas que se equilibrarán serán la 156 y la 234.

78. $P(x)$ es un polinomio cuyos coeficientes son números enteros no negativos, del que únicamente nos dan el valor de $P(2)$ y el de $P(P(2))$. ¿Cómo podemos hallar todos los coeficientes de P con dicha información?

Solución.

Basta con escribir el número $P(P(2))$ en base $P(2)$. Pongamos que

$$\begin{aligned} P(P(2)) &= a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(\text{en base } P(2))} \\ &\equiv a_n \cdot (P(2))^n + a_{n-1} \cdot (P(2))^{n-1} + \dots + a_1 \cdot P(2) + a_0. \end{aligned}$$

Entonces, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Notas. Como $P(2) = 2^n a_n + 2^{n-1} a_{n-1} + \dots + 2a_1 + a_0$, se tiene $a_j < P(2)$ para cada j, luego el número $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(\text{en base } P(2))}$ está correctamente escrito.

Por otra parte, los valores de $P(2)$ y $P(P(2))$ no se pueden asignar arbitrariamente, tienen que corresponder a un polinomio previamente dado. Por ejemplo, se puede proponer el problema con $P(2) = 17$ y $P(17) = 902$. Como $902 = 321_{(17)}$, el polinomio buscado es $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$, para el cual, en efecto, se tiene $P(2) = 17$, lo que hace que el problema esté bien planteado.

En cambio, si proponemos el problema con $P(2) = 3$ y $P(3) = 5$, tenemos que $5 = 12_{(3)}$, pero el polinomio $P(x) = x + 2$ no verifica $P(2) = 3$, por lo que el problema en este caso no está bien planteado (no tendría solución).