Seminario de problemas ESO. Curso 2013-14. Hoja 13

83. Seis vacas se comen toda la hierba de un prado —que crece a ritmo constante— en tres días. Tres vacas, con la misma hambre, se la comen en siete días. ¿Cuántos días tardaría una de esas vacas en comerse toda la hierba del prado si estuviera paciendo ella sola?

Solución.

La cantidad H de hierba consumida por v vacas en d dias es directamente proporcional al número de vacas y también al número de días que están paciendo, de modo que

$$H = q \cdot v \cdot d,$$

con q constante. Por otra parte, $H = 1 + p \cdot d$, considerando que la cantidad inicial de hierba en el prado es 1 y que p es un factor constante que indica la cantidad de hierba que crece en el prado diariamente.

Así, $1 + p \cdot d = q \cdot v \cdot d$.

- Seis vacas, tres días: $1 + 3p = 18q$.
- Tres vacas, siete días: $1 + 7p = 21q$.

De donde $\frac{1+3p}{18} = \frac{1+7p}{21}$, luego $p = 1/21$. Y sustituyendo, $18q = \frac{8}{7}$, luego $q = 4/63$.

Entonces, para una vaca sola, x días:

$$1 + \frac{x}{21} = \frac{4}{63}\,x,$$

de donde $x = 63$ días.

84. Considera todos los números que se escriben con cinco cifras que suman 43, por ejemplo, el número 79999. Si elegimos uno de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 11?

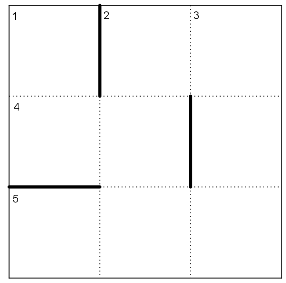
Solución.

En total hay 15 números de cinco cifras cuyas cifras suman 43: cinco como el 79999, formados por cuatro nueves y un siete, y diez como el 88999, formados por dos ochos y tres nueves.

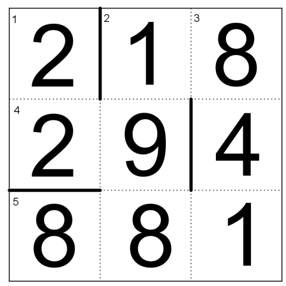
De ellos, los números que son múltiplos de 11 son solamente 97999, 99979 y 98989. Luego la probabilidad es $3/15 = 1/5$.

85. Completa el crucigrama (cada casilla se rellena con un dígito siguiendo las instrucciones):

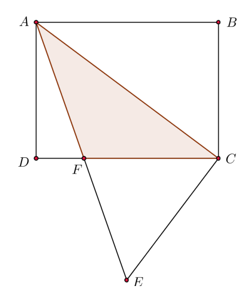
Horizontales	Verticales
2: suma de cifras de 2 vertical	1: producto de dos primos
4: número primo	2: múltiplo de 99
5: 1 vertical + 2 horizontal + 3 vertical	3: cuadrado de 4 horizontal



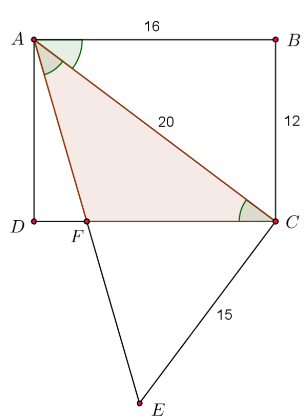
Solución.



86. La figura muestra un rectángulo $ABCD$ con $AB = 16$ y $BC = 12$. Si el ángulo ACE es recto y $CE = 15$, calcula el área del triángulo ACF.



Solución.



Como $AC = 20$, los triángulos ABC y ACE son semejantes. Entonces el triángulo ACF es isósceles, y su área es

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{15}{2} = 75.$$

87. La suma de cinco enteros consecutivos es un cuadrado perfecto, y la suma de los tres centrales es un cubo perfecto. Si todos ellos son menores que 2013, halla la raíz cuadrada de su suma.

Solución.

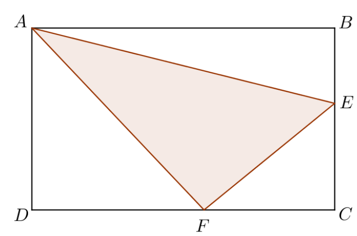
Pongamos que los cinco números sean $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ y $n+2$ ($n \leq 2010$). Se tiene $5n = \square$ y $3n =$ cubo, así que $n = 5k^2$ (con $k \leq 20$) y $n = 9h^3$.

De la igualdad $5k^2 = 9h^3$ resulta que deben ser $k = 3r$ (con $r \leq 6$) y $h = 5s$. Entonces, sustituyendo,

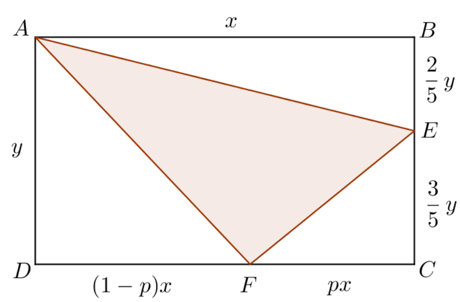
$$5 \cdot 9r^2 = 9 \cdot 125s^3 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 25s^3,$$

de donde $r = 5t$. Luego $t = 1$, $r = 5$, $k = 15$, $n = 1125$ y $\sqrt{\square} = 75$.

88. El área del $\triangle ABE$ es $1/5$ del área del rectángulo $ABCD$, y el área del $\triangle EFC$ es $1/8$ del área de dicho rectángulo. ¿Qué fracción de la superficie del rectángulo ocupa el triángulo AFE?



Solución.



De la primera condición resulta $BE = \frac{2}{5}y$, siendo $y = BC$. Si $CF = px$, siendo $AB = x$, de la segunda condición resulta

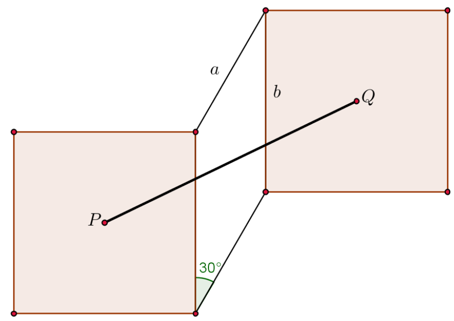
$$\frac{3}{10}p = \frac{1}{8}, \quad \Rightarrow \quad p = \frac{5}{12}.$$

Entonces el área del triángulo ADF es $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}x \cdot y = \frac{7}{24}$ del área del rectángulo $ABCD$. Con esto, el área del triángulo AEF es la fracción

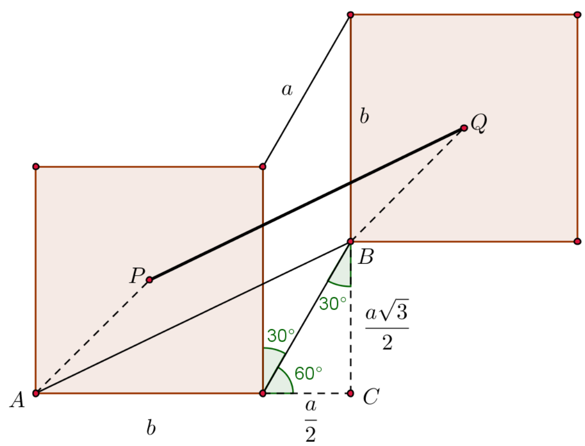
$$1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{7}{24}\right) = \frac{23}{60}$$

del área del rectángulo $ABCD$.

89. Sobre los lados mayores de un paralelogramo de lados a y b y un ángulo de $30°$ construimos dos cuadrados, hacia fuera, como muestra la figura. ¿Cuál es la distancia entre los centros P y Q de los cuadrados?



Solución.



$$PQ^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2 + ab + a^2,$$

luego $PQ = \sqrt{b^2 + ab + a^2}$.