

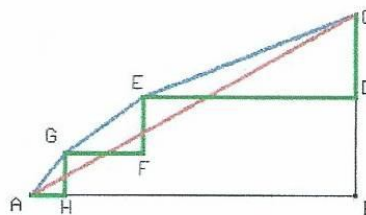
78. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones donde x, y, z son reales positivos:

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} = 10 \end{cases}$$

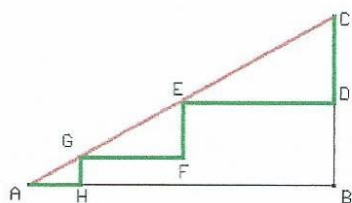
Solución:

En la figura CDE, EFG, GHA y ABC son triángulos rectángulos tales que:

- $GH = 1, AH = x, AG = \sqrt{1 + x^2}$
- $EF = 2, GF = y, GE = \sqrt{4 + y^2}$
- $CD = 3, ED = z, EC = \sqrt{9 + z^2}$
- $AB = 8, BC = 6, AC = 10$



Debe ser $AG + GE + EC \geq AC = 10$. Al darse la igualdad, A, G, E y C están alineados. Los cuatro triángulos rectángulos son semejantes entre sí:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{8}{6} = \frac{z}{3} = \frac{y}{2} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{4}{3}; y = \frac{8}{3}; z = 4$$

79. Hallar las soluciones enteras de la ecuación $p(x + y) = xy$, donde p es un número primo.

Solución

Notemos que la ecuación es simétrica: si (a, b) es una solución, lo será también (b, a) .

La ecuación se puede poner en la forma $(x - p)(y - p) = p^2$.

Como los únicos divisores de p^2 son $\pm 1, \pm p$ y $\pm p^2$ tendremos seis posibilidades:

$$\begin{cases} x - p = 1 \\ y - p = p^2 \end{cases} \Rightarrow (x = p + 1, y = p^2 + p) \quad \begin{cases} x - p = -1 \\ y - p = -p^2 \end{cases} \Rightarrow (x = p - 1, y = p - p^2)$$

y sus dos soluciones simétricas $(x = p^2 + p, y = p + 1)$ y $(x = p - p^2, y = p - 1)$

$$\begin{cases} x - p = p \\ y - p = p \end{cases} \Rightarrow (x = 2p, y = 2p) \quad \begin{cases} x - p = -p \\ y - p = -p \end{cases} \Rightarrow (x = 0, y = 0)$$

80. Si a, b y c son números reales positivos demostrar que: $2 < \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}{\sqrt{a+b+c}} \leq \sqrt{6}$

Solución:

La desigualdad de la derecha se demuestra fácilmente con la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática aplicada a los números $\sqrt{a+b}, \sqrt{b+c}$ y $\sqrt{c+a}$:

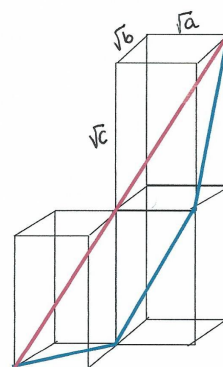
$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}{3} \leq \sqrt{\frac{a+b+b+c+c+a}{3}} = \sqrt{\frac{2(a+b+c)}{3}}$$

trasponiendo: $\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}{\sqrt{a+b+c}} \leq \sqrt{6}$

(La igualdad se da en el caso $a=b=c$)

Para demostrar la desigualdad de la izquierda, proponemos una solución gráfica sin palabras con ayuda del ortoedro de aristas $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ y $\sqrt{c}$

La distancia más corta entre dos puntos...

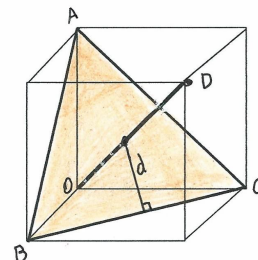


81. En un cubo de arista a , hallar la distancia entre la diagonal espacial del cubo y la diagonal de una cara cuando ambas diagonales se cruzan.

Solución:

La diagonal espacial OD es eje ternario en el cubo, que atraviesa el triángulo ABC por su baricentro y es perpendicular al plano de ABC. La distancia buscada es un tercio de la altura del triángulo ABC (cuyo lado es $a\sqrt{2}$). Por tanto

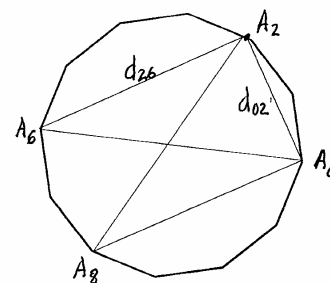
$$d = \frac{1}{3} \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



82. En un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1, hallar la suma de los cuadrados de todos los lados y todas las diagonales. ¿Y si el polígono regular fuese de 2014 lados?

Solución:

Sean $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$ los vértices del dodecágono. Fijamos un diámetro, por ejemplo $A_0A_6 = 2$, y emparejamos las distancias de cada vértice A_i a A_0 y A_6 de modo que $d_{i6}^2 + d_{0i}^2 = 4 \quad i = 0, 1, \dots, 11$



Así hemos sumado todas los cuadrados de distancias a los extremos de A_0A_6 . La suma es $4 \cdot 12 = 48$

Ahora consideramos los demás posibles diámetros (son 6), con lo que tendríamos una suma de $48 \cdot 6 = 288$.

Pero cada distancia ha intervenido dos veces. En la figura d_{02} interviene en los triángulos $A_0A_2A_6$ y $A_0A_2A_8$, con lo que la suma total será 144, es decir 12^2 .

Es fácil generalizar el razonamiento expuesto para polígonos regulares de un número par de lados n :

Sea $n=2k$. La suma de los cuadrados de distancias a los extremos de A_0A_k es $4n$.

Como hay $k=n/2$ diámetros, la suma queda en $\frac{n}{2} \cdot 4n = 2n^2$.

Pero cada distancia ha intervenido dos veces, por lo que la suma total es n^2 .

(En el caso en que $n=2014$, la suma será 2014^2).

También se cumple, en el caso en que n es impar.

Para demostrarlo en general (sea n par o impar) recurrimos al campo complejo:

Consideremos las n raíces n -ésimas de 1 con $n \geq 3$:

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Consideremos en primer lugar la primera de estas raíces: $\omega_0 = 1$ y calculemos los cuadrados de las distancias de las demás raíces a esta raíz de referencia ω_0 :

$$d^2(\omega_k, \omega_0) = \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \frac{2k\pi}{n} = 2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n}$$

La suma de todos estos cuadrados será, por tanto:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n}\right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right), \text{ ya que el primer sumando (para } k=0) \text{ es nulo.}$$

Esta suma sólo se refiere a ω_0 , pero claramente sucederá lo mismo para la suma de los cuadrados de las demás raíces a una raíz cualquiera ω_i , pues el problema es invariante por giros.

La raíz de referencia se puede tomar de n formas distintas, pero en tal caso habremos contado dos veces cada cuadrado $d^2(\omega_i, \omega_j) = d^2(\omega_j, \omega_i)$ al tomar como raíz de referencia ω_j y ω_i respectivamente.

Por consiguiente la suma buscada es

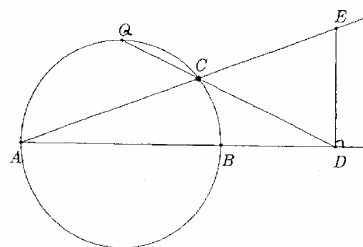
$$S = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right) = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right) = n^2 - n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = n^2 - n \cdot 0 = n^2$$

$$\text{ya que } \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = \operatorname{Re}(\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1}) = \operatorname{Re}(0) = 0$$

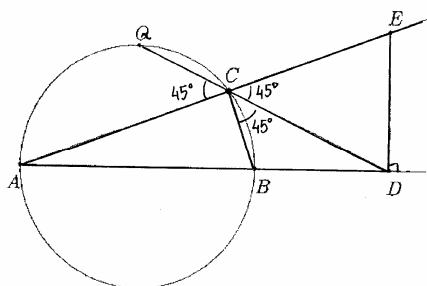
En definitiva, la suma es $S = n^2$

El resultado general, en términos geométricos, es: “en todo polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio 1, la suma de los cuadrados de todos los lados y todas las diagonales es n^2 ”

- 83.** Sea AB el diámetro de una circunferencia y Q el punto medio de uno de los arcos que van de A a B. Tomamos un punto C cualquiera del arco QB. La recta QC corta a la recta AB en D. Levantamos en D una recta perpendicular a AB, que corta a AC en E. Demostrar que los segmentos BD y DE tienen la misma longitud.



Solución



Trazamos el segmento BC. El triángulo BCA es rectángulo en C y semejante a EDA, pues ambos son rectángulos con un ángulo agudo común.

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

Por otro lado el ángulo QCA es de 45° porque es inscrito y abarca un arco de un cuarto de circunferencia. El ángulo ECD mide también 45° (opuesto por el vértice a QCA).

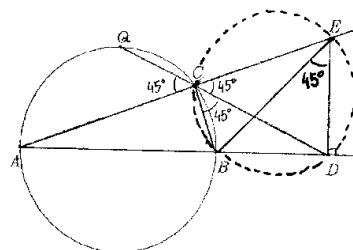
Como BCE es recto (suplementario de ACB), concluimos que CD es la bisectriz exterior de BCE. Aplicando el teorema de la bisectriz exterior al triángulo ACB en su ángulo C:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD = \frac{AD \cdot BC}{AC} = DE \quad \text{c.q.d.}$$

Solución de Víctor Lanchares (más elegante):

El cuadrilátero CBDE es cíclico, pues sus ángulos opuestos son suplementarios.

Si trazamos la circunferencia circunscrita a dicho cuadrilátero observamos la igualdad de ángulos $\widehat{BCD} = \widehat{BED} = 45^\circ$ (inscritos con el mismo arco BD).



Por tanto, el triángulo BDE es rectángulo isósceles, por lo que $BD=DE$.

- 84.** Calcular en función de n el valor de la suma

$$S_n = (2n)^3 - (2n-1)^3 + (2n-2)^3 - (2n-3)^3 + \dots + 4^3 - 3^3 + 2^3 - 1^3$$

Pista fácil de probar por inducción :

Para todo número natural n se verifica que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solución:

Agrupamos de dos en dos los sumandos consecutivos y aplicamos la identidad;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. En nuestro caso el primer paréntesis será 1 y el segundo

$a^2 + a(a - 1) + (a - 1)^2$. Por tanto:

$$S_n = \left[(2n)^2 + 2n(2n - 1) + (2n - 1)^2 \right] + \left[(2n - 2)^2 + (2n - 2)(2n - 3) + (2n - 3)^2 \right] + \\ + \dots + \left[4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2 \right] + \left[2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2 \right]$$

Agrupando convenientemente y reordenando:

$$S_n = \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2 \right] + \left[1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n - 1) \cdot 2n \right] = A_n + B_n$$

El primer corchete es conocido $A_n = \frac{2n \cdot (2n + 1) \cdot (4n + 1)}{6}$

Por otro lado, el segundo corchete se puede organizar así:

$$B_n = (2 - 1) \cdot 2 + (4 - 1) \cdot 4 + (6 - 1) \cdot 6 + \dots + (2n - 1) \cdot 2n = \\ = \left(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 \right) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) = \\ = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ = \frac{4 \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} - n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(4n - 1)}{3}$$

$$\text{Por fin } S_n = A_n + B_n = \frac{n}{3} \left[(2n + 1)(4n + 1) + (n + 1)(4n - 1) \right] = \frac{n}{3} [12n^2 + 9n] = n^2(4n + 3)$$