Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 11

61. En un reloj circular convencional (con dos agujas, una que indica la hora y otra que indica los minutos, que se mueven uniformemente de modo que la de las horas de la vuelta cada medio día y la de los minutos cada hora), ¿cuántas veces a lo largo del día las agujas forman un ángulo recto?

Solución. Puesto que cada medio día las agujas vuelven a la posición inicial, pensamos en qué sucede cada medio día.

Tomamos como nuestro sistema de referencia en la aguja de las horas. Bajo este punto de vista, la aguja de los minutos sigue un movimiento con velocidad angular constante. Además, cada medio día completa la cantidad de vueltas

$$12 - 1.$$

En cada vuelta, la aguja de los minutos está una vez en posición de 90° y otra en posición de 270°. O sea, está dos veces formando ángulo recto.

La respuesta es

$$2 \cdot 2 \cdot (12 - 1) = 44.$$

62. Por el baricentro de un triángulo ABC trazamos una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demostrad que

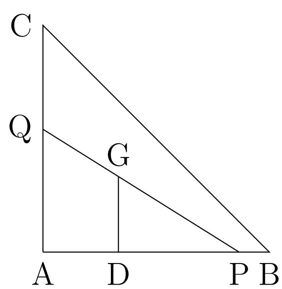
$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

Solución A. La razón de longitudes tomadas en una recta se mantiene por transformaciones afines. Por tanto, podemos suponer que

$$A = (0,0), \quad B = (1,0), \quad C = (0,1).$$

Dicho de otro modo, podemos tomar un sistema de coordenadas centrado en A, cuyo vector unitario en el eje de absicas es $\overrightarrow{AB}$, y cuyo vector unintario en el eje de ordenadas es $\overrightarrow{AC}$.

Sea $P = (p,0)$ y $Q = (0,q)$. Denotamos por G el baricentro del triángulo y por D la intersección de con AB de la paralela a AC que pasa por M. Puesto que los triángulos QAP, GDP son semejantes,



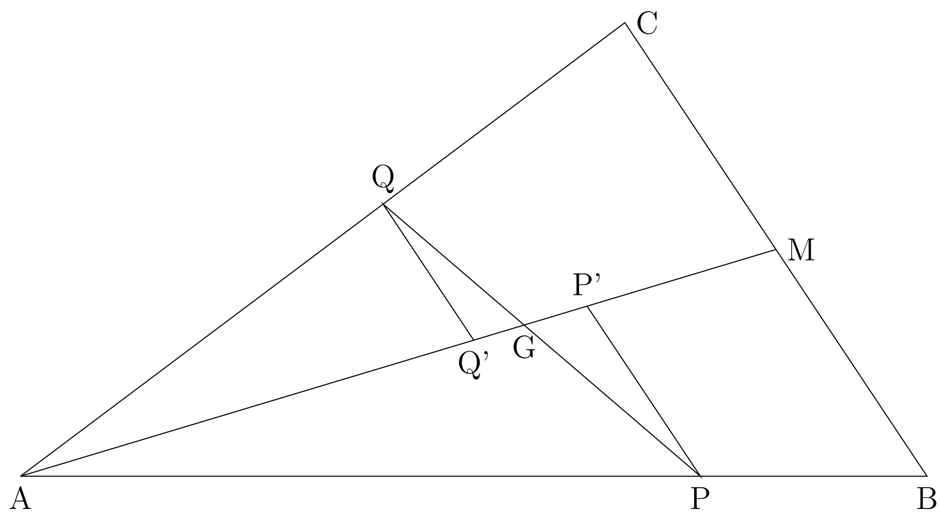
$$\frac{p}{q} = \frac{p - 1/3}{1/3}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - \frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} &= \frac{1}{4} - \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1-q}{q} = \frac{1}{4} - \frac{1-p}{p}\left(\frac{p-1/3}{p/3} - 1\right) \\
&= \frac{p^2 - 4(1-p)(2p-1)}{4p^2} \\
&= \frac{9p^2 - 12p + 4}{4p^2} \\
&= \frac{(3p-2)^2}{4p^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Solución B. Denotamos por G el baricentro del triángulo y por M el punto medio de BC, de modo que los puntos AGM están alineados y $GA = 2 \cdot GM$. Tomamos que unidad de medida GM. Es decir, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $GM = 1$.

Sea P' la interseccón con AG de la la paralela por P a la recta BC. Del mismo modo, consideramos Q' la intersección con AG de la la paralela por Q a la recta BC.



Por el Teorema de Tales,

$$\alpha := \frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} = \frac{P'M}{P'A} \cdot \frac{Q'M}{Q'A}.$$

En caso de que PQ sea paralela a CB tenemos que $P' = Q' = G$. Por tanto se tendrá,

$$\alpha = \frac{GM}{GA} \cdot \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

En caso contrario, P' se encuentra en el interior del segmento GM y Q' en el interior del segmento GA, o viceversa. Puesto que podemos intercambiar los papeles de los vértices B y C, suponemos, sin pérdida de generalidad, que estamos en el primero de los dos casos citados.

Los triángulos GPP' y GQQ' son semajantes. Además $QQ' < PP'$. Por tanto, $GQ' < GP'$. Por tanto Q'', el simétrico de Q' respecto de G es interior al segmento GP'. Si denotamos $h = GQ'$,

$$\alpha < \frac{Q''M}{Q''A} \cdot \frac{Q'M}{Q'A} = \frac{1+h}{2-h} \cdot \frac{1-h}{2+h} = \frac{1-h^2}{4-h^2} = \frac{1}{4} - \frac{3h^2}{4-h^2} < \frac{1}{4}.$$

63. Probad que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

para toda terna x. y, z de números reales, todos distintos de 1 que satisfacen $xyz=1$. Probad que hay infinitas ternas que satisfacen la igualdad.

Solución. Notamos que dada una terna (a,b,c) de números reales no nulos y distintos entre sí, entonces

$$\left(x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}\right) \tag{1}$$

es una terna de números distintos de 1 que cumple $xyz=1$. Recíprocamente, si (x,y,z) es una terna de números distintos de 1 que cumple $xyz=1$, entonces

$$\left(a=1,b=\frac{1}{x},c=z\right)$$

es una terna de números no nulos d distintos entre sí que cumple (1). Además, dos ternas (a,b,c) (a',b',c')producen la misma terna (x,y,z) si y sólo si los vectores (a,b,c), (a',b',c') son proporcionales.

Por tanto, basta (en realidad es equivalente) probar que cualquier terna (x,y,z) definida mediante (1), con (a,b,c) de números reales no nulos y distintos entre sí, verifica la desigualdad del enunciado. Operando,

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}-1=\frac{\left(a^2b+b^2c+ac^2-3\,abc\right)^2}{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2},$$

que es siempre positivo. La igualdad se da cuando

$$a^2b+b^2c+ac^2-3\,abc=0. \tag{2}$$

Veamos que la igualdad se da para infintas ternas. Interpretamos que permutar una solución produce, esencialmente, la misma solución.

Teniendo en cuenta que

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=2(a^2b+b^2c+c^2a)-3abc,$$

(2) equivale a

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=0.$$

Por tanto, la igualdad se da cuando (a, b, c) constituyen las soluciones de un polinomio, en la varaible λ, de la forma

$$\lambda^3 + Ax^2 + B\lambda + C, \quad AB = 3C.$$

Además, distintos valores de (A, B, C) conducen, esencialemte, a distintos valores de la terna (a, b, c). Si imponemos $B = -1$ y $C > 0$, o sea $ab+bc+ca = -1$ y $abc < 0$, distintos valores de (A, B, C) originan distintos valores de la terna (x, y, z). Por tanto, basta probar que hay infinitos valores de $C > 0$ para los cuales el polinomio

$$\lambda^3 - 3C\lambda^2 - \lambda + C$$

tiene tres raíces reales y distintas.

Notamos que para $C = 0$ las raíces del polinomio son reales y distintas, de hecho, son $(-1, 0, 1)$. Por tanto, para C positivo próximo a 0 las raíces son no nulas, reales y distintas.

64. Probad que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto.

Solución.

• Escribimos los cuatro números naturales consecutivos de la forma n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, con n natural. Se tiene

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (n(n+3))((n+1)(n+2)) \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) \\ &= (n^2+3n+1-1)(n^2+3n+1+1) \\ &= (n^2+3n+1)^2-1. \end{aligned}$$

En caso de que $n(n+1)(n+2)(n+3) = a^2$ para algún natural a se tiene, denotando $b = n^2+3n+1$, que $a^2 = b^2-1$. Por tanto

$$1 = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a),$$

de donde se deduce $b+a = b-a = 1$. Ha de ser $a = 0$. Hemos llegado a un absurdo. Luego $n(n+1)(n+2)(n+3)$ no es el cuadrado de ningún entero.

• Uno de los números centrales de la cuaterna, que llamamos m, es impar. Ese número es coprimo con los otros tres. Por tanto, en caso de que el producto de los cuatro sea cubo perfecto, también lo es el producto de los tres que no son m, que llamamos p.

(a) En el caso en que m sea el segundo número de la cuaterna,

$$p = (m-1)(m+1)(m+2) = m^3 + 2m^2 - m - 2.$$

Puesto que, $m \geq 2$,

$$2m^2 - m - 2 \geq 4m - m - 2 = 3m - 2 \geq 4 > 0.$$

Es claro que que $2m^2 - m - 2 < 3m^2 + 3m + 1$. Por tanto

$$m^3 < p < m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3. \tag{3}$$

(b) En el caso en que m sea el tercer número de la cuaterna se tiene

$$p = (m-2)(m-1)(m+1) = m^3 - 2m^2 - m + 2.$$

Como $m \geq 3$,

$$2m^2 + m - 2 \geq 19 > 0.$$

Por otra parte la desigualdad

$$2m^2 + m - 2 < 3m^2 - 3m + 1$$

es equivalente a $4m < m^2 + 1$. Además, para $m \geq 4$,

$$4m \leq m^2 < m^2 + 1.$$

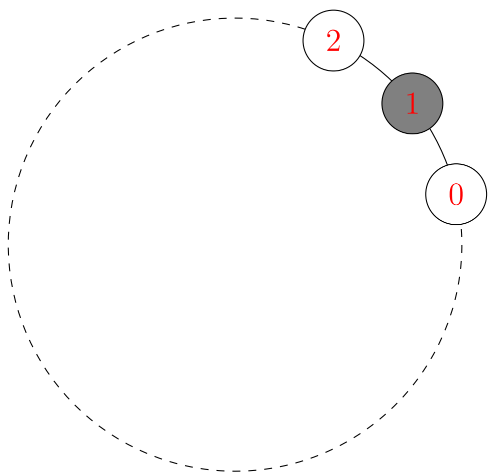
Por tanto, para $m \geq 4$.

$$(m-1)^3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1 < p < m^3. \tag{4}$$

Tanto (3) como (4) conllevan que p no es un cubo perfecto. Llegamos así a que m es el tercer número de la cuaterna y $m \leq 3$. La única posibilidad es que la cuaterna se $(1, 2, 3, 4)$. Por tanto 24 es un cubo perfecto. Este absurdo prueba que el producto de los cuatro números es un cubo perfecto.

65. Colocamos, formando una circunferencia, 2016 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara negra hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2015 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2017 fichas?

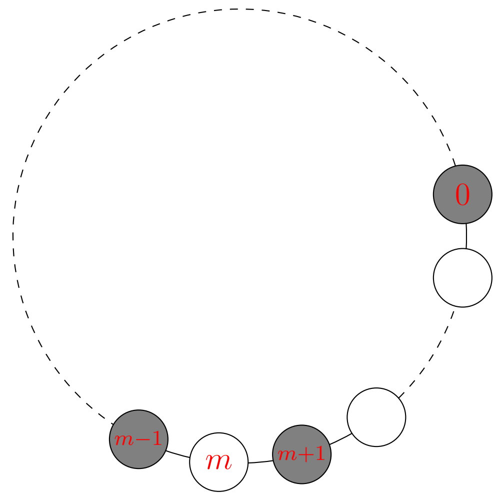
Solución. Llamamos n al número de fichas. Las numeramos, consecutivamente del 0 al $n-1$, de modo que la ficha negra está en el lugar 1.



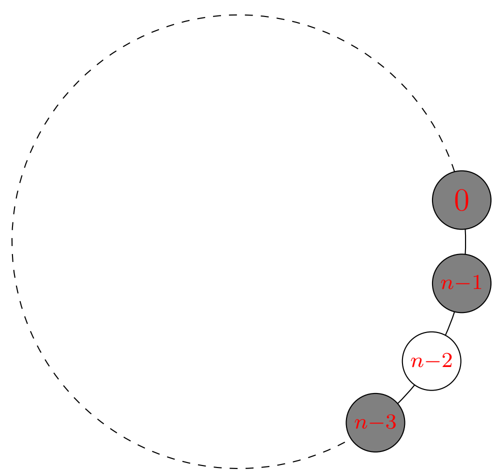
Notamos que si $1 \leq m \leq n-2$ el siguiente proceso de m pasos, que llamamos P_m, es lícito:

P_m: Elegimos, en el paso k-ésimo la ficha k, $k = 1, \ldots, m$.

Además la configuración que produce P_m es:

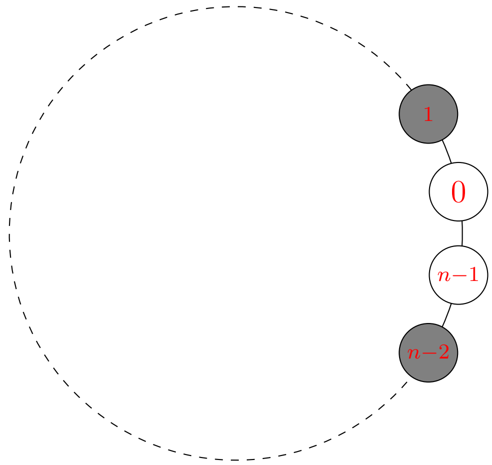


Para ser precisos, estos hechos se demuestran por inducción sobre m. Por tanto, haciendo el proceso P_{n-2} llegamos a la configuración



En caso de que $n = 3k + 1$ para algún $k \geq 1$, elegimos, a partir de esta configuración, no importa en qué orden, las fichas $0, \ldots, 3j, \ldots 3k - 3$. Así todas las fichas quedan blancas.

En caso de que $n = 3k + 2$ para algún $k \geq 1$, elegimos, a partir de la misma configuración la ficha $n - 1$. Llegamos a



Eligiendo ahora las dichas 2, $\ldots$, $3k-1$, todas quedan blancas.

Supongamos que n es múltiplo de 3. Dividimos las fihas en tres tipos, según su resto al dividir por 3. Asignamos una terna a cada posición, según la paridad del número de fichas blancas en cada uno de los tres tipos (múltiplo de 3, congruente con 1 mḿodulo 3 y congruente con 2 mḿodulo 3). Inicialmente la terna es (P, I, P). En casa paso cambia una pieza de cada tipo. Por tanto, en cada paso, pasamos de la terna (P, I, P) a la terna (I, P, I), y viceversa. En el supuesto estado final la terna es (P, P, P). Luego nunca puede alcanzarse.

66. Sean a, b dos soluciones de $x^4 + x^3 - 1 = 0$. Probad que ab es solución de

$$x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0.$$

Solución. Sean a_1, a_2, a_3, a_4 las cuatro raíces de del polinomio

$$P(x) = x^4 + x^3 - 1.$$

Denotamos

$$S(x) = x^6 - V_1x^5 + V_2x^4 - V_3x^3 + V_4x^2 - V_5x + V_6$$

el polinomio cuyas seis raíces son

$$\underbrace{a_1a_2, \ldots}_{\text{symmetric}}$$

Por las fórmulas de Vieta,

$$\boxed{\begin{aligned}
&V_1 = \underbrace{a_1a_2 + \cdots}_{\text{symmetric}} \\
&V_2 = 3a_1a_2a_3a_4 + \underbrace{a_1^2a_2a_3 + \cdots}_{\text{symmetric}} \\
&V_3 = \underbrace{a_1^3a_2a_3a_4 + \cdots}_{\text{symmetric}} + 2(\underbrace{a_1^2a_2^2a_3a_4 + \cdots}_{\text{symmetric}}) + \underbrace{a_1^2a_2^2a_3^2 + \cdots}_{\text{symmetric}} \\
&V_4 = 3(a_1a_2a_3a_4)^2 + \underbrace{a_1^3a_2^2a_3^2a_4 + \cdots}_{\text{symmetric}} \\
&V_5 = \underbrace{a_1^3a_2^3a_3^2a_4^2 + \cdots}_{\text{symmetric}} \\
&V_6 = (a_1a_2a_3a_4)^3.
\end{aligned}}$$

La cuarta fórmula de Vieta del polinomio $P(x)$ nos da

$$a_1a_2a_3a_4 = -1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned}
V_1 &= \underbrace{a_1a_2 + \cdots}_{\text{symmetric}}\\
V_2 &= -3 - \Bigg(\underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \cdots}_{\text{symmetric}}\Bigg),\\
V_3 &= -\Big(\underbrace{a_1^2 + \cdots}_{\text{symmetric}}\Big) - 2(\underbrace{a_1a_2 + \cdots}_{\text{symmetric}}) + \underbrace{\frac{1}{a_1^2} + \cdots}_{\text{symmetric}},\\
V_4 &= 3 + \underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \cdots}_{\text{symmetric}},\\
V_5 &= \underbrace{a_1a_2 + \cdots}_{\text{symmetric}},\\
V_6 &= -1.
\end{aligned}}$$

Notamos (basta hacer la transformación $x \mapsto 1/x$) que $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a_3$, $1/a_4$ son las cuatro raíces de del polinomio

$$Q(x) = -x^4 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 - x - 1.$$

Las primera, segunda fórmula de Vieta del polinomio $P(x)$ nos dan

$$\underbrace{a_1 + \cdots}_{\text{symmetric}} = -1, \tag{5}$$

$$\underbrace{a_1a_2 + \cdots}_{\text{symmetric}} = 0, \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

mientras que la primera y segunda fórmulas de Vieta del polinomio $Q(x)$

conducen a

$$\underbrace{\frac{1}{a_1}+\cdots}_{\text{symmetric}}=0,$$

$$\underbrace{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}+\cdots}_{\text{symmetric}}=0.$$

Manipulando obtenemos, a partir del polinomio $P(x)$,

$$\underbrace{a_1^2+\cdots}_{\text{symmetric}}=(\underbrace{a_1+\cdots}_{\text{symmetric}})^2-2(\underbrace{a_1a_2+\cdots}_{\text{symmetric}})=1,$$

y, a partir del polinomio $Q(x)$,

$$\underbrace{\frac{1}{a_1^2}+\cdots}_{\text{symmetric}}=\Big(\underbrace{\frac{1}{a_1}+\cdots}_{\text{symmetric}}\Big)^2-2\Big(\underbrace{\frac{1}{a_1a_2}+\cdots}_{\text{symmetric}}\Big)=0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned}&V_1=0,\\&V_2=-3-\underbrace{\frac{a_1}{a_2}+\cdots}_{\text{symmetric}},\\&V_3=-1,\\&V_4=3+\underbrace{\frac{a_1}{a_2}+\cdots}_{\text{symmetric}},\\&V_5=0,\\&V_6=-1.\end{aligned}}$$

Notamos que a_1, a_2, a_3, a_4, $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a_3$, $1/a_4$ son las ocho raíces de del polinomio

$$R(x)=(x^4+x^3-1)(x^4-x-1)=x^8+x^7-x^5-3\,x^4-x^3+x+1.$$

Aplicando la segunda fórmula de Vieta al polinomio $R(x)$ obtenemos

$$4 + \underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \cdots}_{\text{symmetric}} + \underbrace{a_1 a_2 + \cdots}_{\text{symmetric}} + \underbrace{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2} + \cdots}_{\text{symmetric}} = 0,$$

de donde deducimos que

$$\underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \cdots}_{\text{symmetric}} = -4.$$

Poniendo todo junto,

$$\begin{aligned} V_1 &= 0, \\ V_2 &= 1, \\ V_3 &= -1, \\ V_4 &= -1, \\ V_5 &= 0, \\ V_6 &= -1. \end{aligned}$$

Es decir, $S(x)$ es el polinomio del enunciado.