Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 11

71. Hallar el número $739ABC$ sabiendo que es múltiplo de $7, 8$ y 9.

Solución

Como $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, y la división entera de 739000 entre 504 es 1466, probamos los siguientes productos:

$$504 \cdot 1467 = 739368, \quad 504 \cdot 1468 = 739872, \quad 504 \cdot 1469 = 740376.$$

Por tanto, las posibles soluciones son 739368 y 739872.

72. Sea n un número de cinco cifras en base 10. Sea m el número obtenido al borrar en n la cifra central. Nos dicen que $\frac{n}{m}$ es un número natural. Hallar n.

Solución

Escribimos $n = abcde$, con lo que $n = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$. Por otro lado $m = abde$, es decir, $m = 1000a + 100b + 10d + e$. Además, $\frac{n}{m} = k$, con lo que

$$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = k(1000a + 100b + 10d + e).$$

Supongamos que $k \geq 11$. Entonces

$$\begin{aligned} k(1000a + 100b + 10d + e) &\geq 11000a + 1100b + 110d + 11e \\ &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e + 1000a + 100b - 100c + 100d + 10e > n, \end{aligned}$$

con lo que k ha de ser menor que 11.

Supongamos que $k \leq 9$. Entonces se tiene que

$$n - km \geq 1000a + 100b + 100c - 80d - 8e > 0,$$

claramente. Por tanto, k ha de ser mayor que 9. Si $k = 10$, se tiene que

$$10000a + 1000b + 100d + 10e = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \Longleftrightarrow 90d + 9e = 100c.$$

En vista de esto último, e debe ser tal que $e = \dot{10}$, con lo que $e = 0$. Además, d debe ser tal que $90d = \dot{100}$, con lo que $d = 0$ y por tanto $c = 0$. Así, para cualquier $a, b \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\frac{ab000}{ab00} = 10,$$

con lo que la solución son todos los números n de la forma $ab000$, con $a, b \in \mathbb{N}$.

73. Probar que si se escogen 26 números naturales diferentes, impares y menores que 100, siempre hay dos de ellos que suman 100.

Solución.

Hay 25 pares de números impares diferentes entre 1 y 99 que suman 100, a saber, $\{1, 99\}$, $\{3, 97\}$, $\{5, 95\}$, $\ldots$, $\{49, 51\}$. Dados 26 números impares diferentes entre 1 y 99, cada uno de ellos pertence a uno de los 25 pares. Por el principio del palomar debe haber dos números pertenecientes a un mismo par, y que por lo tanto suman 100.

74. Demuestra la *desigualdad de Cauchy–Schwarz*: dadas $(x_1,\dots,x_n)$ e $(y_1,\dots,y_n)$, dos n-tuplas de números reales, se cumple que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

Solución.

Consideramos el siguiente polinomio en la variable z

$$(x_1 z + y_1)^2 + \ldots + (x_n z + y_n)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\cdot z^2 + 2\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)\cdot z + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

El polinomio es no negativo para cualquier valor de z, por tanto tiene a lo sumo una raíz real. Entonces su discriminante es menor o igual que cero, es decir,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le 0,$$

y de aquí se deduce inmediatamente la desigualdad de Cauchy–Schwarz.

75. Los números reales x, y, z, t satisfacen las igualdades $x+y+z+t=0$ y $x^2+y^2+z^2+t^2=1$. Demostrar que $-1 \le xy+yz+zt+tx \le 0$.

Solución.

En primer lugar, tenemos:

$$xy+yz+zt+tx = (x+z)(y+t) = -(x+z)^2 \le 0$$

(porque $y+t = -(x+z)$). Entonces,

$$|xy+yz+zt+tx| \le (x^2+y^2+z^2+t^2)^{1/2}(y^2+z^2+t^2+x^2)^{1/2} = 1$$

(por la desigualdad de Cauchy–Schwarz), y se obtiene el resultado.

Comentario. La igualdad $xy+yz+zt+tx=0$ se tiene si y sólo si $x+z=y+t=0$. Por tanto, la desigualdad $xy+yz+zt+tx \le 0$ se convierte en una igualdad para las cuadruplas $(x,y,z,t)=(a,b,-a,-b)$, donde a, b son números reales tales que $a^2+b^2=\frac{1}{2}$.

Si la igualdad $xy+yz+zt+tx=-1$ se tiene, entonces tenemos la igualdad en la desigualdad de Cauchy–Schwarz, con lo que (x,y,z,t) y (y,z,t,x) son proporcionales. Como al menos uno de los números x,y,z,t debe ser no nulo, esto conduce a $x=y=z=t$ o $y=-x, z=x, t=-x$. El primer caso es incompatible con las hipótesis y para el segundo se tienen sólo las siguientes posibilidades:

$$\Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big) \quad \text{y} \quad \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

Recíprocamente, estas dos cuadruplas satisfacen $xy = yz+zt+tx = -1$ y podemos concluir que se cumple $xy = yz+zt+tx = -1$ si y sólo si $(x,y,z,t) = \big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\big)$ o $\big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$.

76. Las sucesiones $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ y $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ son tales que $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, y

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que

$$a_{25} + b_{25} > 10\sqrt{2}.$$

Solución.

Observar primero que, dado un número $t > 0$, se cumple que $t + \frac{1}{t} \geq 2$. En efecto,

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \iff t^2 + 1 \geq 2t \iff (t-1)^2 \geq 0.$$

Se sigue entonces que $a_2 + b_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} + a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 4$. Por otro lado, para $n \geq 1$, se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
(a_{n+1} + b_{n+1})^2 &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} \\
&= \left(a_n^2 + 2\frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{b_n^2}\right) + \left(b_n^2 + 2\frac{b_n}{a_n} + \frac{1}{a_n^2}\right) + 2\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right) \\
&= a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n + \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{b_n^2} + \frac{2}{a_nb_n} + 2\left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}\right) + 4 \\
&= (a_n + b_n)^2 + \frac{a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n}{a_n^2b_n^2} + 2\left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}\right) + 4 \\
&= (a_n + b_n)^2\left(1 + \frac{1}{a_n^2b_n^2}\right) + 2\left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}\right) + 4 \\
&> (a_n + b_n)^2 + 8,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}\right) \geq 2$, por la desigualdad aritmético-geométrica, en la última desigualdad.

Sumando la desigualdad $(a_{n+1} + b_{n+1})^2 > (a_n + b_n)^2 + 8$ para valores de n desde $n = 2$ hasta 24, obtenemos

$$(a_{25} + b_{25})^2 > (a_2 + b_2)^2 + 8(23).$$

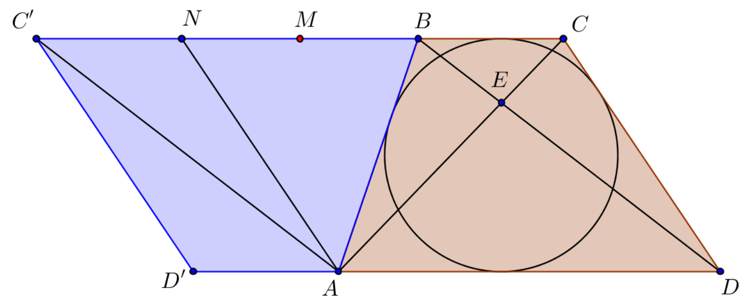
Por tanto, $(a_{25} + b_{25})^2 > 16 + 184$, y de aquí y de la desigualdad de arriba,

$$10\sqrt{2} < a_{25} + b_{25}.$$

77. En el trapecio $ABCD$ de bases AD y BC que tiene circunferencia inscrita, las diagonales se cortan en el punto E. Demuestra que $\angle AED \geq 90°$.

Solución.

Prolongando AD más allá del punto A (figura), sea D' el punto tal que $AD' = BC$. De igual manera, prolongando BC más allá de B, sea C' tal que $BC' = AD$. Entonces $CC'D'D$ es un paralelogramo. Sea N el punto de CC' tal que $C'N = D'A = BC$.



Como $AC'BD$ es un paralelogramo ($C'B = AD$, $C'B \parallel AD$) tenemos que $C'A \parallel BD$. Entonces $\angle BEC = \angle C'AC$, y tenemos que probar que $\angle C'AC \geq 90°$. Sea M el punto medio de CC' (y también entonces punto medio de NB).

Tenemos $CC' = AD + BC = AB + CD$ (propiedad característica de un cuadrilátero circunscrito), $CD = AN$ (ya que $ANC'D'$ es un paralelogramo) y $AB + AN \geq 2AM$ (desigualdad triangular). Luego $\angle C'AC \geq 90°$ aplicando el siguiente resultado auxiliar:

Lema. Sea S el punto medio del lado PQ de un $\triangle PQR$. Si $RS = \frac{1}{2}PQ$, entonces $\angle PRQ = 90°$. Si $RS < \frac{1}{2}PQ$, entonces $\angle PRQ > 90°$.

Demostración. Consideremos una circunferencia de diámetro PQ. En el primer caso, el punto R pertenece a esta circunferencia. En el segundo caso el punto R es interior al círculo.