Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 10

55. A un fabricante de tres productos cuyos precios por unidad son de 50, 70 y 65 euros, le pide un detallista 100 unidades, remitiéndole en pago de las mismas 6850 euros, con la condición de que mande el mayor número posible del producto de precio superior y las restantes de los otros dos. ¿Cuántas deberá enviar de cada producto para servir el pedido?

Solución.

Pongamos x, y, z para las unidades de precios 50, 70 y 65 respectivamente. Tenemos obviamente

$$\begin{cases} 50x + 70y + 65z = 6850 \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

Se trata de resolver el sistema anterior en los naturales haciendo y máximo. Simplificando y eliminando z, resulta:

$$y = 70 + 3x$$

pero

$$x + y \leq 100 \quad \Rightarrow \quad 70 + 4x \leq 100 \quad \Rightarrow \quad x \leq 7.$$

Dado que debemos hacer y máximo, debemos tomar el valor máximo posible de x (ya que $y = 70 + 3x$). Por tanto

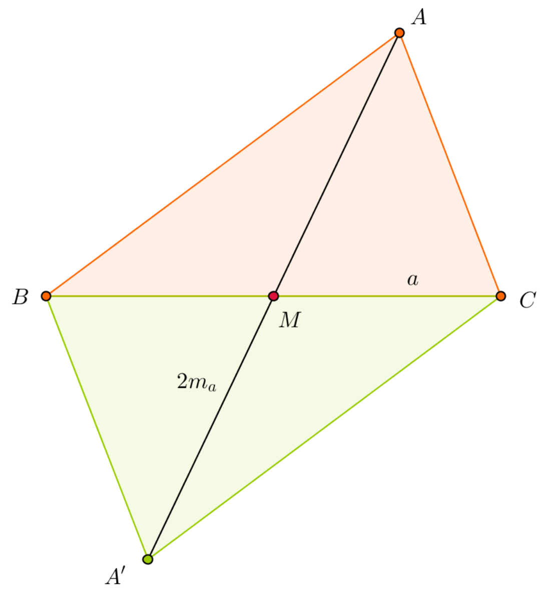
$$x = 7, \quad z = 2, \quad y = 91.$$

56. Demostrar el teorema de Apolonio o teorema de la mediana:

Para todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente. (Apolonio de Perga)

Solución.

Usa la *ley del paralelogramo: En todo paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de dos lados adyacentes*, que resulta de un célebre resultado euclidiano: *En un triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo (obtuso) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos (más) el doble del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él*, que sale de aplicar el teorema de Pitágoras.



Así, con la notación de la figura, donde A' es el simétrico del vértice A respecto de M, siendo M el punto medio del lado BC, y denotando por a, b, c las longitudes de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC y por m_a la longitud de la mediana AM, se tiene, en el paralelogramo $ABA'C$:

$$a^2 + 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

y si aquí dividimos por 2 sale la igualdad requerida en el enunciado.

Demostración de Godfrey y Siddons, por medio del teorema del coseno.

Sea un triángulo cualquiera de lados a, b y c, para cuyo lado c se ha trazado la mediana correspondiente m_c. La mediana m_c forma con el lado c los ángulos Φ y $180^{\text{o}} - \Phi$, siendo Φ el ángulo opuesto al lado b, y $180^{\text{o}} - \Phi$ el ángulo opuesto al lado a. Entonces por el teorema del coseno podemos expresar

$$b^2 = \frac{c^2}{4} + m_c^2 - cm_c \cos \Phi$$

y

$$a^2 = \frac{c^2}{4} + m_c^2 - cm_c \cos(180^{\text{o}} - \Phi) = \frac{c^2}{4} + m_c^2 + cm_c \cos \Phi.$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones y simplificando, obtenemos

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m_c^2.$$

La expresión anterior es la conclusión final del teorema de Apolonio realizada para la mediana m_c. Con razonamientos análogos se puede obtener las expresiones equivalentes para las medianas m_a y m_b, a saber

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2.$$

y

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2m_b^2.$$

57. Sea G el baricentro del triángulo ABC. Demostrar que si

$$AB + GC = AC + GB,$$

entonces el triángulo es isósceles.

Primera solución

Teniendo en cuenta el teorema de Apolonio o teorema de la mediana, la relación del enunciado se escribe

$$c - b = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}\right),$$

y multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada queda:

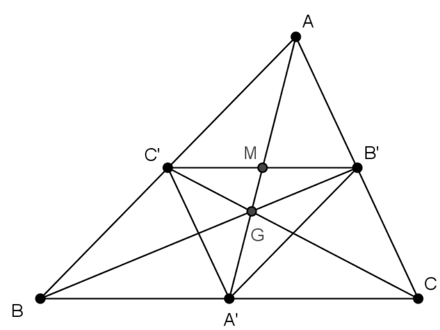
$$c - b = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{3}{4}(c^2-b^2)}{m_c + m_b} \quad \text{que es equivalente a} \quad (c-b)\left(m_c + m_b - \frac{c+b}{2}\right) = 0.$$

Probaremos que el segundo factor es positivo, de donde se deducirá la conclusión. Llamando B' y C' a los puntos medios de AC y AB respectivamente, en los triángulos $CC'A$ y $BB'A$ tenemos por la desigualdad triangular

$$m_b + \frac{b}{2} > c; \quad m_c + \frac{c}{2} > b.$$

Sumando ambas desigualdades se obtiene el resultado.

Segunda solución



Llamando A', B', C' a los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente, y dividiendo por dos la condición del enunciado, ésta podemos escribirla como

$$C'A + C'G = B'A + B'G,$$

es decir, los puntos C' y B' están en una elipse de focos A y G. Llamando M al punto medio de $C'B'$, M está en la mediana AA' y no es el centro de la elipse (punto medio del segmento AG), y por tanto $C'B'$ ha de ser perpendicular a AA', y entonces AA' además de mediana es altura y el triángulo es isósceles.

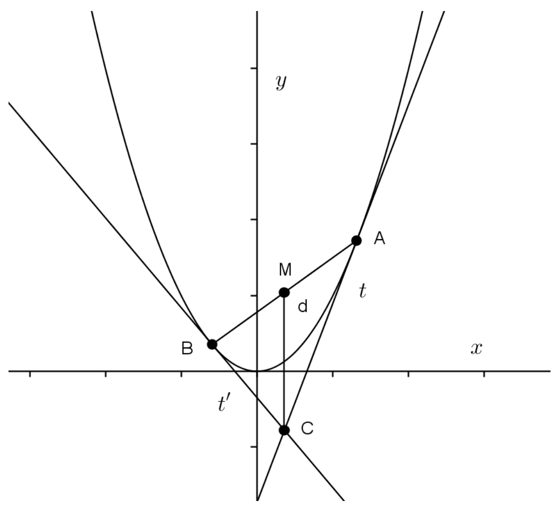
58. Las rectas t y t' tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2$ en los puntos A y B se cortan en el punto C. La mediana del triángulo ABC correspondiente al vértice C tiene longitud m. Determinar el área del triángulo ABC en función de m.

Solución.

Sean $A = (a, a^2)$, $B = (b, b^2)$ los dos puntos de la parábola. Las ecuaciones de t y t' son

$$t : y = 2ax - a^2; \quad t' : y = 2bx - b^2$$

y su intersección C es $C = \left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$. La mediana CM está en la recta $x = \frac{a+b}{2}$, paralela al eje OY. Las coordenadas de M son $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$.



Tenemos que $m = CM = \frac{(a-b)^2}{2}$ y si h es la altura del triángulo BMC resulta

$$h = \frac{|b-a|}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Poniendo $[XYZ]$ para denotar el área del triángulo de vértices X, Y, Z, queda finalmente:

$$[ABC] = 2[BMC] = 2\frac{1}{2}m\sqrt{m/2} = \sqrt{\frac{m^3}{2}}.$$

59. Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP cumple

$$AP = BP.$$

Sobre cada uno de los otros lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BQC y CRA, ambos semejantes al triángulo ABP cumpliendo:

$$BQ = QC \quad \text{y} \quad CR = RA.$$

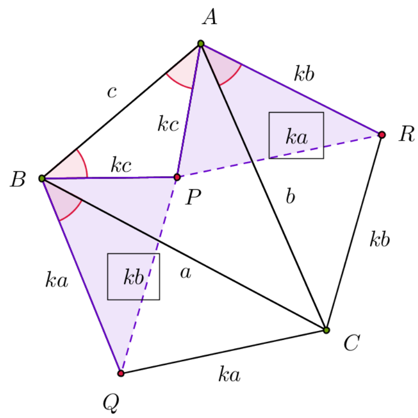
Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

Solución. Por la construcción que se indica, podemos dar los lados de los triángulos ABP, BCQ y CAR en función de una misma constante $k > 1/2$ como (c, kc, kc), (a, ka, ka) y (b, kb, kb) respectivamente (ver la figura).

El triángulo PBQ es semejante al ABC, pues tienen un ángulo igual $\widehat{ABC} = \widehat{PBQ}$ y los lados que forman ese ángulo son proporcionales,

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{kc}{ka} = \frac{c}{a}.$$

De modo análogo, el triángulo PAR es semejante al ABC, y por tanto los triángulos PBQ y PAR son semejantes(y además, $PB = PA = kc$, luego estos dos triángulos de hecho son congruentes).



Entonces $PQ = kb$ y $PR = ka$, con lo que el cuadrilátero $PQCR$ tiene los dos pares de lados opuestos de la misma longitud, y por consiguiente (razonad esto trazando mentalmente la diagonal RQ, etc.) es un paralelogramo.

La figura cae en defecto, y los puntos $P = C$, Q y R están alineados cuando ACB es un triángulo isósceles de base AB y tomamos precisamente $P = C$.

60. Sea p un número primo. Determinar todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{k^2 - pk}$ es un entero positivo.

Solución.

Si ponemos $\sqrt{k^2 - pk} = n$ nos queda $k^2 - pk - n^2 = 0$, de donde se deduce

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2}. \tag{1}$$

El radicando ha de ser cuadrado perfecto; llamémosle a. Se tiene

$$p^2 + 4n^2 = a^2 \quad \text{o bien} \quad p^2 = (a + 2n)(a - 2n).$$

Como p es primo y $a+2n \geq a-2n$, sólo hay dos posibilidades. Una de ellas es $a+2n = p^2$ y $a - 2n = 1$, y la otra $a + 2n = p$ y $a - 2n = p$.

En el primer caso es $a = \frac{p^2+1}{2}$ y $n = \frac{p^2-1}{4}$, lo que exige $p \neq 2$, (n natural).

En el segundo caso resulta $a = p$ y $n = 0$.

Sustituyendo los valores de a en (1) y operando queda:

Si $p = 2$, entonces $k = 2$ o $k = 0$. Pero entonces la raiz cuadrada es cero y no un entero positivo, así que no hay soluciones.

Si $p \neq 2$, entonces quedan los cuatro valores:

$$k_1 = \Big(\frac{p+1}{2}\Big)^2, \quad k_2 = -\Big(\frac{p-1}{2}\Big)^2, \quad k_3 = p, \quad k_4 = 0,$$

y sólo sirven los dos primeros.

Segunda solución.

Para que sea $k^2 - pk = n^2$ con n natural debe ser $n \equiv \pm k \pmod{p}$, de modo que podemos poner, siendo m algún entero,

$$k^2 - pk = (k - mp)^2 = k^2 - 2mkp + m^2p^2,$$

de donde resulta $kp(2m-1) = m^2p^2$ y

$$k = \frac{m^2p}{2m-1}.$$

El número n debe ser un entero positivo, luego no sirven las posibilidades $m = 0$, $k = 0$ ni $m = 1$, $k = p$. Pero cuando $m > 1$, los números m y $2m - 1$ son primos entre sí (ya que $2m$ y $2m - 1$ son consecutivos). Para que k sea entero, sólo cabe que $p = \pm(2m - 1)$ (p primo impar), de donde salen las únicas soluciones

$$k = \Big(\frac{p+1}{2}\Big)^2, \quad k = -\Big(\frac{p-1}{2}\Big)^2.$$