LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

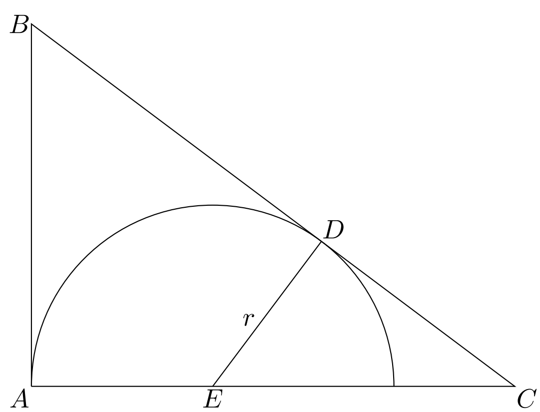
Primera sesión

Viernes tarde, 18 de enero de 2019

1. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa del triángulo y al cateto menor. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

   Solución

   Empecemos por hacer una figura tal como nos dice el enunciado del problema



   Observemos que los triángulos ABC y CDE son ambos rectángulos y semejantes. Así, por ser rectángulo ABC, tenemos

$$AB = 2p, \quad AC = p^2 - 1, \quad BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = p^2 + 1.$$

   Por otro lado,

$$DE = r, \quad CE = p^2 - 1 - r.$$

   Aplicando la semejanza entre los triángulos

$$\frac{r}{2p} = \frac{p^2 - 1 - r}{p^2 + 1} \Rightarrow (p^2 + 1 + 2p)r = 2p(p^2 - 1).$$

El coeficiente que multiplica a r es el cuadrado de $(p+1)$ y, teniendo en cuenta que $(p^2-1) = (p-1)(p+1)$, llegamos a la siguiente expresión para el valor del radio del semicírculo inscrito

$$r = \frac{2p(p-1)}{p+1},$$

que tiene que ser un entero positivo. El numerador de la fracción lo podemos escribir como

$$2(p+1-1)(p+1-2) = 2[(p+1)^2 - 3(p+1) + 2],$$

por lo que

$$r = \frac{2(p+1)^2 - 6(p+1) + 4}{p+1} = 2(p+1) - 6 + \frac{4}{p+1}.$$

De aquí, y teniendo en cuenta que $p \geq 3$, vemos que la única posibilidad de que r sea un entero es que el denominador de la última fracción sea 4, por lo que $p = 3$.

También podríamos haber razonado del siguiente modo: p y $p+1$ no tienen divisores primos comunes entre sí y $p-1$ y $p+1$ tienen como único divisor en común a 2, en caso de que ambos sean pares. Por tanto, en la expresión

$$\frac{2p(p-1)}{p+1},$$

los factores primos del denominador deben cancelarse con factores primos del numerador. La única forma posible en que esto sucede es cuando $p+1 = 4$, es decir $p = 3$.

Obsérvese que la condición de que p sea primo no es necesaria.

2. ¿Existen m, n números enteros positivos de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

Solución

Escribimos la expresión que nos dan de la siguiente manera

$$n^2 + 2019mn + 2019m + n - 2019m^2 - mn$$

y agrupamos los términos que están multiplicados por 2019 y los que no. De este modo se obtiene

$$n(n-m+1) + 2019m(n-m+1) = (n-m+1)(n+2019m).$$

Entonces, para que esta expresión sea un número primo, uno de los factores tiene que ser igual a 1 y el otro un número primo.

Puesto que $n, m \geq 1$ el único factor que puede ser igual a 1 es el primero, por lo que $n = m$. Pero en este caso, el segundo factor es $2020n$, que no es primo. Es decir, la expresión que nos dan nunca puede dar lugar a un número primo.

Podríamos haber argumentado, también, que la expresión dada siempre es un número par, por lo que, de ser un número primo, solo puede ser el 2. Por tanto queremos ver que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 \neq 2$$

para n y m enteros positivos. Viendo lo anterior como un polinomio en n, para m fijo, nos damos cuenta de que siempre es creciente para $n \geq 0$. Como, para $n = 0$, el valor del polinomio es negativo, hay un momento en que cambia de signo y pasa por 0. Si el 0 es un número natural, tiene que ser un divisor del término independiente

$$2019m - 2019m^2 = 2019m(1 - m)$$

Probando con $m - 1$, vemos que el polinomio es igual a 0. Por otra parte, para $n = m$, resulta

$$m^2 + 2019m^2 + 2019m + m - 2019m^2 = 2020m > 2,$$

si $m \geq 1$. Como el polinomio es creciente, alcanza el valor 2 entre $n = m - 1$ y $n = m$, que no es un entero. Luego no hay solución.

3. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan
$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$
para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Solución

En primer lugar, observemos que, si $P(x) = 0$, se cumple trivialmente que
$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x),$$
para todo $x \in \mathbb{R}$ y para cualquier entero $k \geq 1$. Fijémonos, ahora, en el caso especial en que $k = 1$. Entonces,

$$P(x) - P(x) = xP(x) \Rightarrow 0 = xP(x) \Rightarrow P(x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, que es la solución que ya habíamos obtenido.

Si $k > 1$, y $P(x)$ es un polinomio de grado n, se tiene que la parte izquierda de la igualdad es un polinomio de grado nk, mientras que el polinomio de la derecha es un polinomio de grado $n+k$. Si ambos polinomios son iguales, su grado tiene que ser el mismo, por lo que

$$nk = n + k \Rightarrow n = k = 2 \quad \left(n = \frac{k}{k-1} \longrightarrow k = 2, n = 2\right).$$

Así pues, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Sustituyendo esta expresión en la igualdad, teniendo en cuenta que $k = 2$, resulta

$$ax^4 + bx^2 + c - 4ax^2 - 2bx - c = ax^4 + bx^3 + cx^2.$$

De aquí se sigue que

$$bx^3 + (c - b + 4a)x = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, los coeficientes del polinomio deben ser nulos

$$b = 0, \quad c = -4a \Rightarrow P(x) = a(x^2 - 4),$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Concluimos que $P(x) = 0$ es solución cualquiera que sea el valor de $k \geq 1$ y, para $k = 2$, los polinomios de la forma $P(x) = a(x^2 - 4)$ también son solución.

LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 19 de enero de 2019

4. Considera el conjunto de números naturales n cumpliendo que $1 \leq n \leq 1\,000\,000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma $a^3 + mb^2$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

   Solución

   Empecemos por acotar los valores de a y b. Vemos que $a^3 \leq 1\,000\,000$, por lo que
   $$1 \leq a \leq 100.$$
   Análogamente,
   $$b^2 \leq 1\,000\,000 \Rightarrow 1 \leq b \leq 1\,000.$$
   Cuando $m = 0$, tenemos 100 números de la forma $a^3 + 0 \cdot b^2$. Para $m = 2, 4, 6, 8$ tendremos como máximo $100 \times 4 \times 1\,000$, las maneras de combinar los 100 posibles valores de b con los 4 de m y los 1000 de b. En total 400 000 números. Así, como máximo, tendríamos 400 100 números, que son menos de la mitad. Por lo tanto hay más números que no pueden expresarse de esta forma.

   Nótese que no hemos considerado que muchas de las 400 000 combinaciones dan lugar a números mayores que 1 000 000, pero eso no es relevante, pues se trata solo de una cota superior.

5. Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que
   $$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}.$$
   ¿En qué caso se cumple la igualdad?

   Solución

   Puesto que a, b, c son números positivos, multiplicamos toda la desigualdad por ab^3c para quitar los denominadores. Así, queda
   $$a^3 - a^2bc \geq ab^2c^2 - b^3c^3.$$

Factorizando ambos lados de la desigualdad, resulta

$$a^2(a-bc) \geq b^2c^2(a-bc) \Rightarrow a^2(a-bc) - b^2c^2(a-bc) \geq 0.$$

Volviendo a factorizar

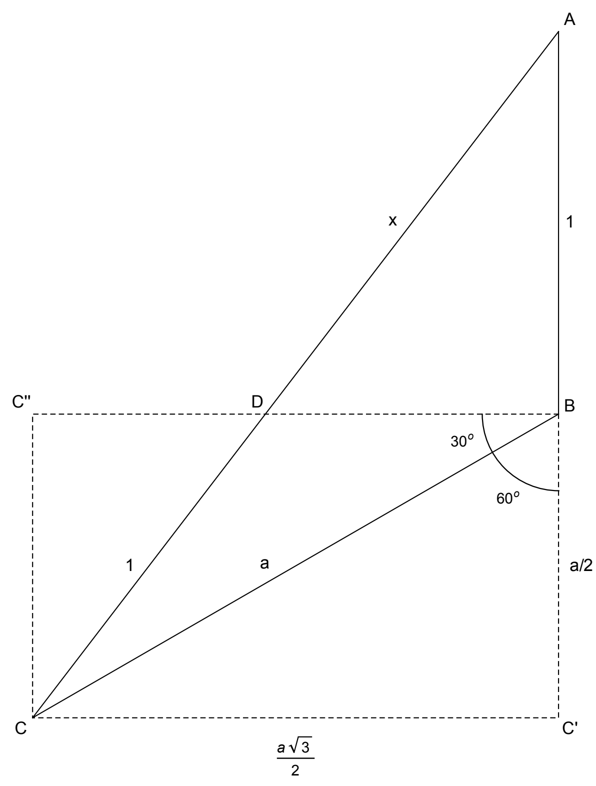
$$(a-bc)(a^2-b^2c^2) = (a-bc)^2(a+bc) \geq 0 \Rightarrow (a-bc)^2 \geq 0,$$

ya que $(a+bc) > 0$, al ser los números positivos. Pero la desigualdad anterior es siempre cierta y la igualdad se da cuando $a = bc$.

6. Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC. Si $\overline{AB} = \overline{DC} = 1$, $\angle DBC = 30^\circ$ y $\angle ABD = 90^\circ$, calcula el valor de $\overline{AD}$.

   Solución

   En primer lugar hacemos un dibujo con los datos del problema y en el que hemos trazado algunas líneas y elementos auxiliares.

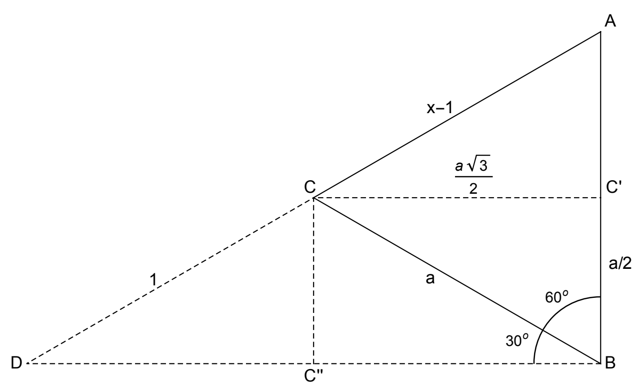


   En concreto, hemos prolongado el lado AB y hemos trazado la altura desde C. También hemos introducido a, el lado BC. Por las propiedades del triángulo BCC', deducimos que

$$BC = \frac{a}{2}, \quad CC' = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De la semejanza entre los triángulos rectángulos ABD y $CC''D$, se sigue que
$$\frac{1}{x} = \frac{a/2}{1} \Rightarrow a = \frac{2}{x}.$$
Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ACC' resulta
$$(1+x)^2 = \left(1+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1+a+a^2.$$
Teniendo en cuenta que $a = 2/x$, resulta
$$x^2+2x = \frac{2}{x}+\frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4+x^3 = 2x+4 \to x^3(x+2) = 2(x+2).,$$
de donde se deduce que $x = \sqrt[3]{2}$.

Existe una construcción alternativa, ya que no nos dicen que D tiene que estar entre los vértices A y C, pudiendo estar en su prolongación. En este caso el dibujo resultante es el siguiente



Razonando de manera similar, encontramos que
$$BC' = \frac{a}{2}, \quad CC' = a\frac{\sqrt{3}}{2},$$
siendo a el valor del lado BC. Por la semejanza de los triángulos ADB y CDC'' resulta
$$\frac{1}{x} = \frac{a/2}{1} \Rightarrow a = \frac{2}{x}.$$
Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ACC' se obtiene
$$(x-1)^2 = \left(1-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1-a+a^2.$$

Teniendo en cuenta que $a = 2/x$, resulta

$$x^2 - 2x = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \Rightarrow x^4 - x^3 = 4 - 2x \rightarrow x^3(x-2) = -2(x-2),$$

de donde se deduce que $x = 2$. En este caso, el triángulo ABC es equilátero.