Seminario de problemas Curso 2018-19.

Estrategias matemáticas:
Principio del palomar y principio de invariancia.

---

1. El principio del palomar

A la hora de enfrentarnos a la resolución de un problema muchas veces pensamos que se necesitan técnicas y conocimientos sofisticados. Sin embargo, en algunas ocasiones, solo se necesitan algunas nociones o principios elementales. Este es el caso del denominado *principio del palomar* o *principio de las cajas*. El enunciado se nos antoja de sentido común y dice lo siguiente

Principio del palomar: *Si distribuimos n palomas en m nidos, y $n > m$, entonces algún nido tiene más de una paloma.*

No es difícil formular una versión generalizada de este mismo principio.

Principio del palomar generalizado: *Si distribuimos $km+n$ palomas en m nidos, y $n \geq 1$, entonces algún nido tiene al menos $k+1$ palomas.*

Este principio tan elemental tiene numerosas aplicaciones inesperadas, algunas de ellas de gran elegancia. A veces es fácil reconocer que para resolver un problema hay que usar el principio del palomar, sin embargo no suele ser fácil identificar los nidos y las palomas. Veamos algunos ejemplos sencillos donde podemos aplicar este principio.

1. Una bolsa contiene bolas de cinco colores diferentes. ¿Cuál es el menor número de bolas que debemos sacar, sin mirarlas, para asegurar que tenemos dos del mismo color?

2. Prueba que en un grupo de 37 personas hay al menos cuatro que han nacido en el mismo mes.

3. ¿Cuántas personas se necesitan para asegurar que hay dos que cumplen años el mismo día?

Vamos a resolver ahora algunos problemas algo más complicados y que no son tan evidentes como los anteriores.

Ejemplo 1. Un total de n equipos de fútbol se enfrentan entre sí jugando partidos todos los fines de semana hasta que al final se enfrenten todos contra todos. Prueba que al acabar cada fin de semana siempre hay dos equipos que han jugado, hasta ese momento, el mismo número de partidos.

Identificamos los nidos como el número de partidos que ha podido jugar un equipo hasta ese momento. Este número puede variar entre 0, si todavía no ha jugado ningún partido, y $n-1$ si se ha enfrentado a todos los demás equipos. Así, tenemos n nidos y n equipos. Parece que no podemos aplicar el principio del palomar, pero analicemos un poco mejor la situación. Los nidos 0 y $n-1$ son incompatibles, pues no puede darse el caso de que un equipo haya jugado contra todos los demás y otro no haya jugado ningún partido. Por lo tanto el número de nidos es uno menos, es decir $n-1$ y como hay n equipos en algún nido tiene que haber al menos dos equipos. Es decir, todas las semanas habrá al menos dos equipos que lleven jugados el mismo número de partidos.

Ejemplo 2. Dados 2020 números enteros cualesquiera, prueba que siempre podemos encontrar dos de ellos cuya diferencia es divisible por 2019.

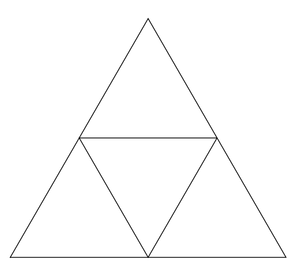
En este caso los nidos van a ser los posibles restos que se obtienen al dividir un número por 2019. Es decir, los números 0, 1, 2, ..., 2018. En total hay 2019 restos posibles. Como tenemos 2020 números, podemos asegurar que habrá al menos dos de ellos que dejan el mismo resto al dividirlos por 2019. Por tanto, la diferencia de estos dos números es divisible por 2019.

Problema 1. Prueba que existe al menos un número con todas sus cifras iguales a 1 que es múltiplo de 2019.

El principio del palomar lo encontramos también en problemas de corte geométrico, donde los nidos, o palomares, pueden construirse gráficamente. Un ejemplo típico es el siguiente

Ejemplo 3. Prueba que, dados 5 puntos en un triángulo equilátero de lado 2, siempre podemos encontrar dos que están a distancia menor o igual que 1.

La idea es construir cuatro palomares, a partir de una división adecuada del triángulo equilátero en cuatro partes iguales. Esta división se ve en la siguiente Figura, donde el triángulo original se ha dividido en cuatro triángulos equiláteros de lado 1.



Por el principio de palomar hay al menos dos puntos en alguno de estos cuatro triángulos y la distancia entre ellos no puede ser mayor que el lado del triángulo, por lo que están a distancia menor o igual que 1.

Problema 2. Dados 51 puntos en un cuadrado de lado 1, prueba que siempre podemos encontrar tres de ellos que pueden cubrirse con un círculo de radio 1/7.

---

2. El principio de invariancia

Esta estrategia no se basa en un enunciado como el que hemos visto para el principio del palomar. En este caso se trata de un principio *heurístico**, que se usa cuando se realiza un proceso de manera reiterada. Lo que nos preguntamos es si existe algo que permanece invariable por mucho que el proceso se repita. Así, nuestro principio de invariancia podría enunciarse de la siguiente manera:

Si hay repetición, busca algo que no cambie.

No siempre buscamos algo que permanezca invariante en la repetición de un proceso. A veces, resulta clave el determinar si el proceso converge a un estado estable, que puede ser único o que se repite en forma de ciclo. En otras ocasiones es interesante observar que un proceso no puede repetirse indefinidamente, por ejemplo, un entero positivo no puede decrecer indefinidamente sin perder su carácter de positivo.

Vamos a ilustrar lo anterior con algunos ejemplos, para luego proponer algunos problemas que se basan en este principio.

Ejemplo 4. Dividimos un círculo en seis sectores y escribimos, empezando en uno cualquiera de ellos, y en sentido de las agujas del reloj, los siguientes números: 1, 0, 1, 0, 0, 0. Podemos realizar la siguiente operación: incrementar en 1 dos números contiguos. ¿Es posible conseguir, realizando una secuencia adecuada de operaciones, que los números que hay en los seis sectores sean iguales?

Estamos ante un proceso que podemos repetir el número de veces que queramos. Como hay repetición, trataremos de buscar un invariante, algo que no cambie al realizar la operación. Aquí es donde interviene la heurística, y no queda otro remedio que ir probando hasta que, en un momento dado, demos con el *eureka* que nos conduzca a la solución.

Como aumentamos en una unidad dos sectores consecutivos, la diferencia entre ellos no varía, lo que nos da la pista fundamental para encontrar el invariante que buscamos. Llamemos a_1 al número que está escrito en el primer sector, a_2 al del segundo y así sucesivamente hasta el a_6 que

*RAE. «En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc.»

está en el sexto sector, recorriendo el círculo en el sentido de las agujas del reloj. Inicialmente tenemos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 0,\ a_5 = 0,\ a_6 = 0.$$

Notemos que, como estamos en un círculo, al a_6 le sigue el a_1, es decir, están en sectores consecutivos. Tomemos ahora

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6.$$

Esta cantidad no varía al incrementar en uno dos sectores consecutivos, por lo que S siempre vale lo mismo. Inicialmente tenemos $S = 2$ y si todos los números escritos en los sectores fueran iguales tendríamos $S = 0$, pero esto no puede ser, ya que S es invariante. Así pues, no podemos lograr, por mucho que repitamos la operación dada, que los números escritos en los sectores sean iguales.

En el ejemplo anterior hemos encontrado un invariante como tal, una cantidad que permanece inalterada a lo largo de un proceso. Ahora vamos a presentar un ejemplo diferente, en el que no existe un invariante, pero sí una restricción que hace que no podamos repetir un proceso indefinidamente, por lo que llegaremos a un estado final al cabo de un número finito de pasos.

Ejemplo 5. Tenemos un tablero rectangular con $n \times m$ casillas (n filas y m columnas). En cada casilla escribimos un entero positivo y podemos realizar una de las dos siguientes operaciones:

1. Multiplicar todos los números de una misma fila por 2.

2. Restar 1 a cada uno de los números de una misma columna.

¿Es posible, tras una sucesión adecuada de estas operaciones, que todos los números del tablero sean iguales a 0?

Veamos que sí es posible. Fijémonos en una columna, por ejemplo la primera, y veamos que es posible disminuir en una unidad todos aquellos elementos que son mayores que uno. En efecto, si todos los elementos son mayores que uno, aplicando la segunda operación, en el siguiente paso todos los elementos habrán disminuido en una unidad. Si alguno de los elementos de la columna es igual a 1, multiplicamos la fila a la que pertenece por dos, mediante la primera operación. Ahora, como todos los elementos son mayores que uno, podemos restar 1 a todos ellos. La concatenación de estas dos operaciones deja los unos invariantes y disminuye en una unidad el resto de elementos. Como el proceso no puede repetirse indefinidamente, llegará un momento en que todos los elementos de la primera columna sean iguales a 1. Una vez en este estado, restamos

1 a cada elemento de la primera columna y habremos conseguido una columna con todo ceros.

Basta repetir el proceso anterior con cada una de las columnas para llegar a una disposición final con todo ceros.

En algunos casos, como en el cálculo de límites, debemos repetir un proceso indefinidamente para llegar a un estado final. La presencia de invariantes puede ser clave a la hora de determinar el valor de dicho límite.

Ejemplo 6. Sean dos números a y b tales que $0 < b < a$ y generamos la siguiente sucesión de puntos (x_n, y_n):

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}.$$

Prueba que x_n, y_n convergen a un límite común.

Observemos que, en cada paso, vamos calculando la media aritmética y la media armónica de los dos números anteriores. Por la desigualdad entre medias tenemos que $y_{n+1} \leq x_{n+1}$, pero además

$$0 \leq x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{x_n - y_n}{2} < \frac{x_n - y_n}{2}.$$

Así pues,

$$0 \leq x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2} < \cdots < \frac{x_0 - y_0}{2^{n+1}} = \frac{a - b}{2^{n+1}}.$$

Aquí podemos ver que la distancia entre x_{n+1} e y_{n+1} va a ser 0 en el infinito y, por tanto, x_n, y_n tienden a un límite común.

Para calcular el límite, observemos que hay un invariante en el proceso, que es el producto de x_n e y_n

$$x_{n+1} y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = x_n y_n = a \cdot b.$$

Ahora no es difícil encontrar el límite común. De la expresión para y_n en el límite, y usando el invariante, resulta

$$L = \frac{2ab}{2L} \Rightarrow L = \sqrt{ab},$$

que es la media geométrica de los números a y b.

Problema 3. Un polígono regular de 2019 lados tiene los vértices coloreados con tres colores diferentes: 900 son de color azul, 700 de color rojo y 419 de color amarillo. Nos está permitido elegir dos vértices de distinto color y cambiarlos al tercer color. Por ejemplo, un vértice azul y otro rojo podemos cambiarlos a color amarillo. ¿Es posible, mediante repeticiones adecuadas de esta operación, llegar a una de las siguientes situaciones?

1. Todos los vértices son del mismo color.
2. El número de vértices de color azul, rojo y amarillo es el mismo.

Problema 4. Tenemos una fila con 2019 números enteros, $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$, no necesariamente distintos y no necesariamente ordenados. Ahora construimos una segunda fila, debajo de la primera, de manera que debajo de cada a_k de la primera fila hay un entero positivo que es igual al número de veces que a_k está en la primera fila, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 & 7 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

De la misma manera, a partir de la segunda fila, construimos la tercera fila y así sucesivamente. Prueba que llega un momento en que una de las filas es igual a la siguiente.

Problema 5. Sean dos números a y b tales que $0 < a < b$ y generamos la siguiente sucesión de puntos (x_n, y_n) dada como

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_{n+1}}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}.$$

Prueba que x_n, y_n tienden al mismo límite y calcula dicho límite.
