

Seminario de problemas Curso 2023-24. Hoja 9

Problemas de la Fase 0 de la LX Olimpiada Matemática Española de la Comunidad de Madrid

81. La niña Centésima invirtió 500 euros en un negocio y, dos meses más tarde, don Retorcido, envidioso, se unió e invirtió 300 euros en el mismo negocio. Si, después de 10 meses asociados, ganaron en total 2700 euros, ¿cuánto dinero le corresponde a la niña Centésima?

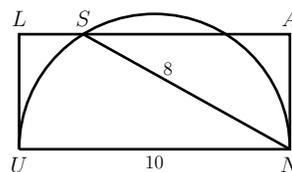
A) 1400 € B) 1600 € C) 1800 € D) 1900 € E) 1950 €

82. ¿Cuántas soluciones enteras, (x, y, z) , tiene la ecuación $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + z^2 = 100$?

A) 30 B) 24 C) 20 D) 18 E) 9

83. En el rectángulo $LUNA$ el lado mayor mide $UN = 10$. El semicírculo de diámetro UN corta al lado LA en un punto S , siendo $SN = 8$. ¿Qué área tiene el rectángulo $LUNA$?

A) 44 B) 45 C) 46 D) 48 E) 50



84. Una competición consiste en resolver 100 ecuaciones. Para que el torneo sea justo, en los enfrentamientos individuales, los estudiantes de BACH dan una ventaja de 30 ecuaciones a los de 4ESO y los de 4ESO dan a los de 3ESO una ventaja de 20 ecuaciones. ¿Cuántas ecuaciones de ventaja debe dar un estudiante de BACH a uno de 3ESO?

A) 40 B) 44 C) 50 D) 56 E) 60

85. ¿Cuál es el valor de $(50^2 + 48^2 + \dots + 4^2 + 2^2) - (49^2 + 47^2 + \dots + 3^2 + 1^2)$?

A) 625 B) 850 C) 1000 D) 1250 E) 1275

86. Don Retorcido tiene varias canicas, todas del mismo peso. La suma total de los pesos de todos los posibles grupos de cuatro canicas es quince veces la suma total de los pesos de todas las posibles parejas. ¿Cuántas canicas tiene don Retorcido?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

87. Sol dice a Sergio: si me das un cuarto de tu dinero yo tendré los tres quintos de lo que te quede. Sergio responde a Sol: si tú me dieras un tercio de lo que tienes yo tendría 2240 euros más de lo que te quede. ¿Cuántos euros tienen entre los dos amigos?

A) 2880 B) 2900 C) 2920 D) 2960 E) 2300

88. Si a, b, c, d , son cifras diferentes no nulas que suman 23, ¿cuánto suman los números de cuatro cifras formados por esas cuatro cifras?

A) 127898 B) 138888 C) 153318 D) 338825 E) 638825

89. ¿Cuál es el valor de $\frac{2023^3 + 2023^2 - 2024}{2023^2 - 1}$?

A) $\frac{2024}{2023}$ B) $\frac{2023}{2024}$ C) $\frac{2023}{2022}$ D) 2023 E) 2024

90. Voy a meter fichas blancas y negras en una caja, pero no lo haré al tuntún. En total tiene que haber más de 30 fichas y menos de 35. Además, las fichas negras serán más que la mitad de blancas y menos de 15. Con estas condiciones, ¿de cuántas maneras puedo meter las fichas en la caja?

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

91. ¿Cuál es la cifra de las unidades del número $2023^{(2024^{2022})}$?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 1

92. Comenzamos con un triángulo equilátero ABC . A continuación, extendemos el lado AB hacia B hasta llegar al punto B' de tal manera que $BB' = 3AB$. De manera análoga, alargamos el lado BC hacia C hasta encontrar el punto C' cumpliendo $CC' = 3BC$. Y también definimos el punto A' con $AA' = 3CA$. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de los triángulos $A'B'C'$ y ABC ?

- A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 37

93. En el último examen que hice a mis estudiantes, nadie tuvo un 0. La media del grupo completo fue 6; la media de los que tuvieron por lo menos un 6 fue 7, y la media del resto del grupo fue 4. ¿Qué proporción de estudiantes tuvo menos de 6?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{2}{7}$

94. El producto de dos números enteros positivos es 2160 y sabemos que su máximo común divisor es un número impar mayor que 1. Si m es su mínimo común múltiplo, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdad?

- A) $m < 200$ B) $200 < m < 400$ C) $400 < m < 600$
D) $600 < m < 800$ E) $m > 800$

95. La parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene su vértice en el punto $V(h, k)$ y, al reflejarse sobre la recta $y = k$, se transforma en la parábola $g(x) = dx^2 + ex + f$. ¿Cuál es el valor de la suma $a + b + c + d + e + f$?

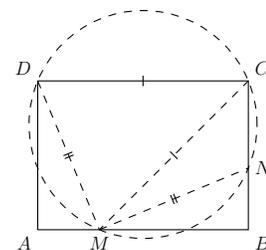
- A) $2b$ B) $2c$ C) $2a + 2b$ D) $2h$ E) $2k$

96. Comenúmeros ha escrito todos los números, desde el 1 al 2023, en un papel. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de unos y de ceros que ha tenido que usar?

- A) 78 B) 1010 C) 1087 D) 2023 E) 2054

97. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, elegimos un punto M en el lado AB y un punto N en el lado BC , de modo que $MD = MN$ y $MC = CD$. Sabiendo además que el cuadrilátero $CDMN$ es cíclico, es decir, existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vértices, ¿cuál es la razón AB/BC ?

- A) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2



98. ¿Cuántos pares de enteros positivos (a, b) verifican que a divide a b siendo $a + 2b = 1010$?

- A) 503 B) 1 C) 2 D) 3 E) 504

99. Ana tiene que subir ocho escalones. Lo hace subiendo de uno en uno o de dos en dos, pero no puede pisar el sexto escalón porque está roto. ¿De cuántas formas distintas puede llegar Ana al escalón más alto?
 A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10
100. La ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$ tiene dos soluciones reales, una de las cuales es un entero positivo menor que 1000. ¿Cuántos valores racionales diferentes puede tomar el coeficiente k ?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 995 E) 999
101. Dado un triángulo ABC , sean X un punto del lado AB , Y un punto del segmento XB y Z un punto del lado AC tales que XZ es paralelo a YC e YZ es paralelo a BC . Si $AX = 16$ y $XY = 12$, ¿cuánto mide YB ?
 A) 8 B) $\frac{40}{3}$ C) 18 D) 21 E) 28
102. La parábola $y = x^2 - 600$ pasa por el punto $K(k, k)$ con k entero positivo. ¿Cuál es la suma de las cifras de k ?
 A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8
103. Julián deja una moneda con la cara hacia arriba en una mesa. Después Lucía deja dos monedas más sobre la mesa y, por último, Miguel se lleva una de las monedas, pero ninguno de los dos se fijó en cómo estaban las monedas. Al final, resulta que las dos monedas que quedan en la mesa tienen la cara hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda que se llevó Miguel también tuviera la cara hacia arriba?
 A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{3}{5}$
104. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 1. Los puntos X e Y están en los lados BC y CD respectivamente y son tales que los triángulos ABX , XCY y DAY tienen igual área. ¿Cuál es la relación entre el área del triángulo AXY y el área del triángulo XCY ?
 A) $\sqrt{5}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{5} - 1$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
105. Diego y Valeria tienen que fregar cacharros. Lanzan un número indeterminado de dados para ver quién lo hará. Diego friega si no sale ningún 6 y Valeria friega si sale solo un 6. Si no pasa ninguna de las dos cosas vuelven a tirar. ¿Cuántos dados tienen que lanzar para que ambos tengan la misma probabilidad de fregar los platos?
 A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 12

