Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 9

61. Sea n un entero positivo cualquiera. Prueba $n^3 - n$ siempre es divisible por 6.

62. Sea k un entero positivo. Prueba que el número $4k + 2$ no puede ser un cuadrado.

63. Sea n un entero positivo impar. Prueba que, al dividir n^2 entre 8, el resto siempre es 1.

64. Sea n un entero positivo; por ejemplo, $n = 13$ (el número no es importante). Prueba que n tiene un múltiplo que se expresa como una ristra de varios dígitos «4» seguida de una ristra de varios «0».

65. Demuestra que en una fiesta siempre hay, al menos, dos personas que conocen al mismo número de invitados. (Nota: «Conocerse» es recíproco, es decir, si Ana conoce a María, forzosamente María conoce a Ana.)

66. En el juego de la quiniela, una apuesta es una secuencia de 14 signos que pueden ser «1», «X» o «2». La quiniela premiada es una secuencia concreta de tales signos. El número de aciertos de una apuesta es el número de signos que coinciden, en su posición, con la quiniela premiada. ¿Cuántas apuestas tenemos que hacer para garantizar que en alguna de ellas hay, al menos, 5 aciertos? Con una apuesta menos, ¿cuántos aciertos podemos garantizar?

67. En un torneo de tenis, lo más habitual es que participen $n = 2^k$ jugadores, para k un entero positivo. De ese modo, en cada ronda se eliminan la mitad de los jugadores, y las últimas rondas son la final, las semifinales, los cuartos de final, los octavos de final, etc. De ese modo, ¿cuántos partidos se juegan? Si n no es una potencia de 2 ya no se puede organizar un torneo tan bien ordenado, y, por ejemplo, algunos jugadores tienen que disputar fases previas. En ese caso, y para n cualquiera, ¿cuántos partidos se disputarán?

68. Supongamos que tenemos una serie de objetos idénticos dispuestos en forma de cuadrado (igual número de filas que de columnas), y que los movemos para colocarlos formando un rectángulo en el que el número inicial de filas ha aumentado en 5. ¿Cuántos objetos tenemos?