

Seminario de problemas Curso 2016-17. Hoja 9

54. Prueba que cada uno de los elementos de la sucesión

$$1^5 - 1, 2^5 - 2, 3^5 - 3, \dots, n^5 - n, \dots$$

es divisible entre 30.

55. Los números $1, 2, \dots, 2n$ se dividen arbitrariamente en dos grupos de n números. Sean $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ los números del primer grupo y $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ los del segundo. Prueba que

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2.$$

56. Demuestra que para cualesquiera ocho números reales a, b, c, d, e, f, g y h , al menos una de las sumas

$$ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh,$$

es mayor o igual que cero.

57. El otro día subí con Manolo al autobús 62. Al sacar los dos billetes, observé y se lo comenté, que la suma de las diez cifras de los dos números de billete era precisamente 62. Entonces él, no sé si intuyendo ya algo, me preguntó si las cifras de alguno de los dos sumaban 35. Yo le respondí, y al cabo de un rato Manolo me dijo ¡el número de cada billete! ¡Increíble! Pues no tanto.

Pista: Yo, ¿qué le respondí? ¿sí o no?

58. Una empresa de paquetería entre Madrid y Astaná tiene dos relojes analógicos de distinto tamaño colgados en la pared, uno con la hora local de Madrid y el otro con la hora local de Astaná —cinco horas más que en Madrid—. ¿Qué figura forman los puntos medios de los segmentos que unen los extremos de las agujas horarias en el transcurso de doce horas?

59. Una parábola se puede definir como el lugar geométrico de los puntos de un plano cuyas distancias a una recta —denominada *directriz*— y a un punto exterior a la recta —denominado *foco*— son iguales. Por ejemplo, la directriz Δ y el foco F de la parábola $y(x) = x^2$ son, respectivamente, la recta $\Delta : y = -1/4$ y el punto $F = (0, 1/4)$.

Supongamos una familia de parábolas que comparten la misma directriz Δ y que tienen un punto en común R que no es el vértice de ninguna de ellas. Sea d la distancia del punto R a la recta Δ . Demuestra que cada parábola de la familia tiene un único punto en común con la parábola de foco R y directriz $\tilde{\Delta}$, donde $\tilde{\Delta}$ es la recta paralela a Δ a distancia d y que no pasa por R .

