

Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 9

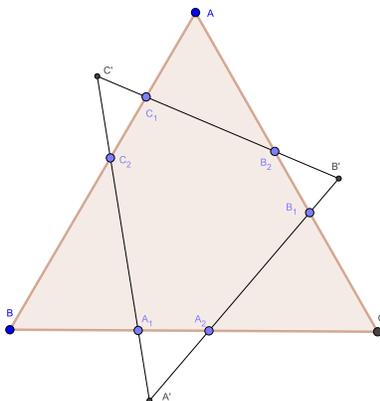
49. Alberto, Bernardo y Carla se han conocido en una red social. Ellos preguntan a Carla cuándo es su cumpleaños; en lugar de responderles directamente, ella decide ponerles un problema. Para ello les da una lista con diez posibles fechas: 15, 16 y 19 de mayo, 17 y 18 de junio, 14 y 16 de julio, 14, 15 y 17 de agosto.

Después, Carla les dice por separado a Alberto y a Bernardo el mes y el día de su cumpleaños, respectivamente. Entonces Alberto señala: «No sé cuándo es el cumpleaños de Carla, pero sé que Bernardo tampoco lo sabe». A lo que Bernardo responde: «Al principio no sabía cuándo era el cumpleaños de Carla, pero ahora ya lo sé». Alberto reflexiona y concluye: «Entonces yo también sé cuándo es su cumpleaños». ¿Qué día es el cumpleaños de Carla?

50. Sean $x, y > -1$. Probar que

$$\frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + xy \geq 0.$$

51. Sean A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_3 tres segmentos de igual longitud en los lados de un triángulo equilátero. Probar que en el triángulo formado por las rectas B_2C_1 , C_2A_1 , A_2B_1 , los segmentos B_2C_1 , C_2A_1 , A_2B_1 son proporcionales a los lados en los cuales ellos están contenidos.



52. Hallar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c ,

$$xP(x - c) = (x - 2014)P(x).$$

53. Probar que para todo entero positivo n , $n^2 + n + 1$ no tiene ningún divisor de la forma $3j + 2$, con $j \geq 0$.
54. Sean P_1, P_2, \dots, P_n subconjuntos de dos elementos distintos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tales que si P_i y P_j tienen un elemento común, entonces $\{a_i, a_j\}$ es uno de los conjuntos P_k . Demostrar que cada a_k aparece exactamente a dos P_ℓ .