Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 9

57. Se pincha aleatoriamente un punto P en el interior de un triángulo equilátero ABC . ¿Cuál es la probabilidad de que los segmentos PA , PB y PC sean los lados de un triángulo acutángulo?
58. Sean a y b dos números enteros. Encuentra un polinomio de coeficientes enteros una de cuyas raíces sea el número $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.
59. Se pintan nueve puntos sobre la superficie de un tetraedro regular de 10 cm de arista. Prueba que entre esos puntos tiene que haber dos situados a una distancia (en el espacio) no mayor que 5 cm.
60. Un autobús que recorre una ruta de 100 km está equipado con una computadora que predice el tiempo que le falta para llegar al destino final. Esta predicción se realiza sobre la hipótesis de que la velocidad media del bus en la parte restante de recorrido será la misma que la que ha conseguido en la parte de trayecto ya cubierta. Cuarenta minutos después de la salida del bus, la computadora predice un tiempo restante de una hora. Y esta predicción permanece constante durante las cinco horas siguientes. ¿Es posible que ocurra esto? En caso afirmativo, ¿cuántos km ha recorrido el bus al final de estas 5 horas y 40 minutos?
61. Tres rectas tangentes a la circunferencia inscrita a un triángulo acutángulo dividen el triángulo en tres triángulos rectángulos y un hexágono. El radio de la circunferencia inscrita es r y el perímetro del hexágono es q . Encuentra la suma de los diámetros de las circunferencias inscritas a los tres triángulos rectángulos en función de r y q .
62. Un cuadrado 3×3 está relleno con los números $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ de la siguiente forma:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

. Dado que el cuadrado es *mágico* (las sumas de los números de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales son iguales), demuestra:
- (a) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.
- (b) $2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2$.
- (c) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.
63. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD . Sea X un punto del segmento AB . Sea $P = BC \cap AD$, es decir, el punto de intersección de las rectas BC y AD , y, análogamente, $Y = CD \cap PX$, $R = AY \cap BD$ y $T = PR \cap AB$. Prueba que

$$\frac{1}{AT} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{AB}.$$