Seminario de problemas Bachillerato. Curso 2013-14. Hoja 9

55. Sabiendo el siguiente resultado de Ramanujan

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}=3,$$

demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\cdots}}}}}=n+1.$$

56. Probar que

$$1^n+2^n+3^n+4^n=\dot{5} \Leftrightarrow n \neq \dot{4}$$

57. Probar que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n+1 \neq \dot{7}.$$

58. Probar que para cualesquiera números naturales n, m se verifica

$$(2m)!(2n)! = \overset{\cdot}{\overline{m!n!(m+n)!}}$$

59. Sea n un entero positivo y sean $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ números reales

1. Demostrar que
$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.$$
2. Demostrar que la igualdad se cumple si y sólo si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están en progresión aritmética.

60. Un cierto día en Valdeperillo había menos de 30 personas, el $80'\widehat{952380}\%$ eran del pueblo, el resto forasteras. ¿Cuántas eran del pueblo y cuántas eran forasteras?

61. Demostrar que en todo triángulo el radio de la circunferencia circunscrita es mayor o igual que el diámetro de la circunferencia inscrita. (Desigualdad de Euler).