Seminario de problemas Curso 2023-24. Hoja 8

Los problemas de esta hoja se resuelven aplicando el principio de inducción matemática.

70. Prueba que la ecuación $x^2 + y^2 = z^n$ tiene soluciones enteras positivas (x, y, z) para todo valor de $n = 1, 2, 3, \ldots$.

71. Prueba que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

72. Prueba que $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$.

73. Prueba que $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} > \sqrt{n}$.

74. Prueba que $2!\ 4! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n$.

75. Prueba que, para todo $0 \leq x \leq \pi$, se verifica $|\operatorname{sen} nx| \leq n \operatorname{sen} x$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

76. Prueba que, para todo número natural $n > 4$, se verifican las siguientes desigualdades:

$$2^n > 2n + 1; \qquad 2^n > n^2.$$

77. Prueba que, para todo número entero $n \geq 0$, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible por 133.

78. Prueba que $n^4/2 + n^3/3 + n^2/2 - n/3$ es un entero positivo para todo $n \geq 1$.

79. Prueba que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número de n dígitos que es divisible por 5^n y su expresión decimal contiene sólo los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9.

80. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que verifican

1. $f(1) = 2$.
2. $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

81. Prueba que, para todo ángulo θ y para todo número entero $n \geq 0$, se verifica la igualdad

$$\cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cdots \cos 2^n\theta = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\theta}{2^{n+1} \operatorname{sen}\theta}.$$