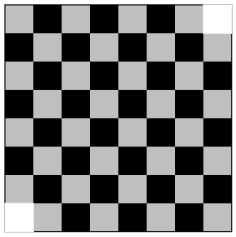
Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 8

57. ¿Cuántos números hay entre 1 y 300 que no sean múltiplos ni de 2, ni de 3, ni de 5?

58. Elegimos dos números al azar (se permite repetición) del conjunto $\{1, 2, \ldots, N\}$. Demuestra que la probabilidad de que la suma sea par es mayor o igual que la probabilidad de que la suma sea impar.

59. Determina todas las parejas de números enteros (m, n), ambos mayores o iguales que 0, de forma que $|3^m - 2^n| = 1$. Por ejemplo $(0, 1)$ y $(1, 1)$ son dos de tales parejas, ya que $|3^0 - 2^1| = 1$ y $|3^1 - 2^1| = 1$..

60. Sabemos que es posible cubrir un tablero de ajedrez con 32 fichas de domino de modo que cada ficha cubra dos casillas. ¿Es posible hacer lo mismo con un tablero de ajedrez al cual le hemos quitado las dos esquinas negras?



61. Sean α y β las soluciones de la ecuación cuadrática

$$(x-2)(x-3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 0.$$

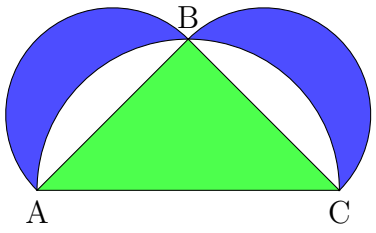
Calcula

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}.$$

62. Determina el valor exacto de la siguiente suma

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2020\cdot 2021\cdot 2022}.$$

63. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en $\angle ABC$. Lo inscribimos en una semicircunferencia como se ve en la Figura. En el lado AB con centro en su punto medio dibujamos una nueva semicircunferencia exterior al triángulo pasando por A y B. Hacemos lo mismo sobre el lado AC. Si la hipotenusa del triángulo mide 2, ¿cuál es el área de la zona de color azul?



64. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

A partir de la identidad anterior, prueba que $\cos(20^\circ)$ es un número irracional.