

Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 8

54. ¿Existe algún valor de n tal que $14^n + 2021$ es un número primo?
55. Encuentra, razonadamente, todos los números naturales n tales que n^2 tenga solamente cifras impares (expresado en base 10).
56. Sean $a_0, a_1, a_2, \dots$ tales que

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \quad n, m \geq 0, \quad m \geq n.$$

Si $a_1 = 1$, ¿cuánto vale a_{2021} ?

57. Sean a, b, c números reales no nulos tales que $a + b + c \neq 0$ y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}.$$

Prueba que entonces

$$\frac{1}{a^{2021}} + \frac{1}{b^{2021}} + \frac{1}{c^{2021}} = \frac{1}{a^{2021} + b^{2021} + c^{2021}}.$$

58. Encuentra todas las soluciones de la ecuación $a!b! = a! + b! + c!$, donde a, b, c son enteros positivos.
59. Sea P un punto del lado BC de un triángulo ABC . La paralela por P al lado AB corta al lado AC en el punto Q y la paralela por P al lado AC corta al lado AB en el punto R . La razón entre las áreas de los triángulos RBP y QPC es k^2 . Determina la razón entre las áreas de los triángulos ARQ y ABC .
60. Se considera una circunferencia de centro O y radio r , y un punto P exterior a la misma. Se trazan cuerdas AB paralelas a OP .
- (a) Demuestra que $PA^2 + PB^2$ es constante.
- (b) Halla la longitud de la cuerda AB que hace máxima el área del triángulo ABP .