Seminario de problemas Curso 2017-18. Hoja 8

56. Este problema fue resuelto en 1826 por el matemático suizo Jacob Steiner. Consiste en calcular el número máximo de regiones R_n en que queda dividido el plano por n rectas, buscando para ello una recurrencia adecuada para R_n. A continuación calcula cuántas de estas regiones no están acotadas.

57. Se quiere recubrir un rectángulo de tamaño $2 \times n$ con baldosas de tamaños 2×2 y 2×1. Encuentra una relación de recurrencia para calcular c_n, el numero total de recubrimientos diferentes que pueden hacerse.

58. ¿De cuántas formas se puede cubrir un rectángulo de tamaño $2n \times 3$ con baldosas de tamaño 2×1?

59. Encuentra una recurrencia para determinar el total de secuencias formadas con 1, 2 y 3 de forma que detrás de un número no puede haber otro mayor. Resuelve la ecuación recurrente encontrada.

60. Busca una recurrencia para la siguiente fracción continua y calcula su valor

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

61. Se define la sucesión (a_n) por

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 1 + a_n a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Comprueba si a_{2018} es divisible entre 4 o no.

62. Se define la siguiente sucesión de forma recurrente:

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = 1, \quad b_3 = -1 \\ b_{n+1} = b_n b_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Calcula b_{2018}.

63. Tenemos n objetos numerados del 1 al n y n lugares para dejarlos, también numerados del 1 al n. Sea d_n el número de formas que tenemos de dejar los objetos de forma que no haya ninguno en su lugar (a estos números se les denomina *desarreglos* o *desórdenes* de orden n). Encuentra una recurrencia para d_n y obtén su expresión en forma explícita.