

## Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 8

---

43. Encuentra todas las parejas  $(a, b)$  de dígitos no nulos del sistema decimal (es decir,  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ) tales que el número cuya expresión decimal es  $ab$ , divide a todos los números cuyas expresiones decimales son  $a0b, a00b, a000b, a0000b, \dots$ . ¿Cuánto valen los respectivos cocientes?
44. Dado un cuadrilátero  $ABCD$ , sean  $E, F, G$  y  $H$  los puntos medios respectivos de los lados  $AB, BC, CD, DA$ . Describe con el mayor grado de precisión los cuadriláteros  $ABCD$  para los que se cumple cada uno de los siguientes casos:
- (a)  $EFGH$  es un cuadrado.
  - (b)  $EFGH$  es un rombo y  $ABCD$  es cíclico (es decir,  $A, B, C$  y  $D$  están sobre una misma circunferencia).
  - (c)  $EFGH$  es un cuadrado y  $ABCD$  es cíclico.
45. Sabes que el código que abre una caja fuerte es un número de 4 dígitos, que es además el mayor divisor primo de  $3^{22} + 3$ . No tienes calculadora, y no te acuerdas del código pero lo necesitas. ¿Cómo lo hallarías?
46. Determinar si existe un entero  $k$  para el que se cumpla la siguiente igualdad

$$\sqrt{2016} - \sqrt{2015} = \sqrt[2016]{k - \sqrt{k^2 - 1}}.$$

47. Un profesor de matemáticas tiene una clase con 10 alumnos, y les pone el siguiente examen: los alumnos se pondrán en fila, y a cada uno le pondrá un sombrero en la cabeza. Cada sombrero puede ser de uno de dos colores, blanco o rojo. Cada uno puede ver los colores de los sombreros de los que tiene delante en la fila, pero no puede ver ni el color de su propio sombrero, ni el color de los que tiene detrás en la fila. Cada uno de los alumnos va diciendo un color, *blanco* o *rojo* por turno, empezando desde el último de la fila, luego el penúltimo, y así hasta llegar al primero. Cada alumno de la fila puede oír todas las respuestas previas (es decir, las respuestas de todos los que están detrás suyo en la fila). Por cada alumno que dice el color del sombrero que lleva, el profesor da un punto. La nota final de cada alumno de la clase es la suma de aciertos. El profesor deja que los alumnos hablen entre ellos y diseñen una estrategia antes de ponerse en fila, pero luego no pueden hablar entre ellos, sólo esperar a que les ponga el sombrero a todos, y luego decir *blanco* o *rojo* cuando llegue su turno. Demuestra que los alumnos tienen una estrategia que les permite asegurarse una nota de 9.

**Nota.** no se admiten estrategias que dependan de decir *blanco* o *rojo* más suave o más fuerte, cambiando el acento, etc. Los alumnos han de decir el color en un tono neutro, que no dé más información que el propio color. Si los alumnos hacen trampa, el profesor les pone un 0 a todos.

48. Dado un triángulo  $ABC$ , sea  $M$  el punto medio del lado  $BC$ , y sea  $H$  el ortocentro de  $ABC$ . Sea  $N$  el simétrico del punto  $H$  respecto del punto  $M$ . Demuestra que  $N$  está sobre la circunferencia circunscrita a  $ABC$ .