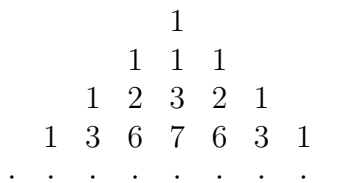


Seminario de problemas. Curso 2019-20. Hoja 8: Recurrencias

85. Se considera el triángulo de números que vemos al lado, en el que cada número es la suma de tres de los números situados en la fila previa a la suya: el número que tiene encima y los situados inmediatamente a izquierda y a derecha de éste. Si no hay un número en alguna de estas posiciones se entiende que hay un 0. Prueba que, desde la tercera fila en adelante, cada fila contiene al menos un número par (positivo).



86. Encuentra el término general de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

(a) $a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 1; a_4 = 2; a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-4}$ si $n \geq 5$.

(b) $a_0 = 0; a_{n+1} = 2a_n - 4n + 3^n$ si $n \geq 0$.

(c) $a_3 = -31; 5na_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1} + 5$ si $n \geq 1$.

87. Para cada número entero $n \geq 1$, sea $s(n, k)$ el número de subconjuntos que están formados por k de los elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y que no contienen dos números consecutivos. Prueba:

(a) $s(n, k) = s(n-2, k-1) + s(n-1, k)$.

(b) $s(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$.

88. ¿De cuántas maneras se puede cambiar 1 euro en monedas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos?

89. Encuentra el término general de la sucesión que da las áreas de los sucesivos cuadriláteros que se disponen en una rejilla unitaria como muestra la figura de al lado (usa la fórmula de Pick).

90. Los siete enanitos marchan a trabajar cada día en fila india, ajustándose a una disposición por estaturas que puede ser, o bien la de 'bajo-alto-bajo-alto-...', o bien la de 'alto-bajo-alto-bajo-...', es decir, una disposición en la que nunca haya tres de ellos seguidos en orden de estaturas creciente o decreciente. Los siete tienen distintas estaturas. ¿Cuántos días pueden ir al trabajo manteniendo cada día una ordenación diferente? ¿Y si todos los días fuera acompañándolos Blancanieves?

