Seminario de problemas. Curso 2018-19. Hoja 8 (Polinomios)

69. Hallar el mayor número real k con la propiedad que para todo polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ de grado 4, cuyos ceros son todos reales y positivos, se cumple

$$(b - a - c)^2 \geq kd,$$

y determinar cuándo se alcanza la igualdad.

70. Sean a, b y c números reales. Probar que los tres son no negativos si y sólo si

$$a + b + c \geq 0, \quad ab + bc + ca \geq 0 \quad \text{y} \quad abc \geq 0.$$

71. Para 5 enteros a, b, c, d, e sabemos que las sumas

$$a + b + c + d + e \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

son divisibles por un número impar n. Probar que la expresión

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde$$

también es divisible por n.

72. Hallar todos los polinomios con coeficientes iguales a 1 o -1 cuyos ceros son todos reales.

73. Para una función f denotamos

$$f^1(x) := f(x), \quad f^n(x) := f(f^{n-1}(x)) \quad n \geq 2.$$

¿Existe un polinomio cuadrático P tal que la ecuación $P^n(x) = 0$ tenga exactamente 2^n raíces reales para todo entero positivo n?

74. Probar que no existe ningún polinomio P de coeficientes reales y grado $n \geq 1$ tal que $P(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

75. Sea P un polinomio de grado impar que satisface la identidad

$$P(x^2 - 1) = P(x)^2 - 1.$$

Probar que $P(x) = x$ para todo x real.