Seminario de problemas. Curso 2017-18. Hoja 7 (Polinomios)

47. Sea p un polinomio con coeficientes enteros. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ son distintos y cumplen que $p(a) = p(b) = p(c) = -1$, entonces p no tiene ceros enteros.

48. Probar que el polinomio $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots + x^{2n}/(2n)!$ no tiene ceros reales.

49. Sea f un polinomio con coeficientes enteros. Probar que si $f(0)$ y $f(1)$ son impares, entonces f no tiene ceros enteros.

50. Probar que si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ son distintos, entonces $(x - a_1) \cdots (x - a_n) - 1$ es irreducible.

51. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ distintos y sea P un polinomio con coeficientes enteros. Probar que las condiciones

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$

no se pueden satisfacer simultáneamente.

52. Sea $f(x) = (x^{2018} + x^{2017} + 2)^{2019} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Hallar

$$a_0 - a_1/2 - a_2/2 + a_3 - a_4/2 - a_5/2 + a_6 - \cdots .$$

53. Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $x^2 - 6x + 1$. Probar que $x_1^n + x_2^n$ es un entero no divisible por 5, para todo entero no negativo n.

54. Sea $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ para cierto entero $n > 1$. Probar que f es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

55. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios de grado mayor o igual que 1. Sean

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} : P(z) = k\}, \quad Q_k := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = k\}.$$

Si $P_0 = Q_0$ y $P_1 = Q_1$, probar que $P(z) \equiv Q(z)$.