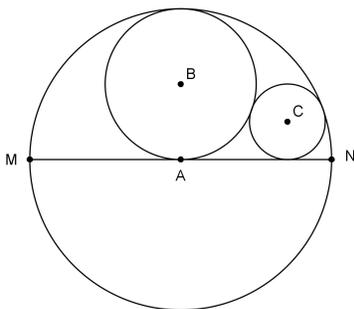


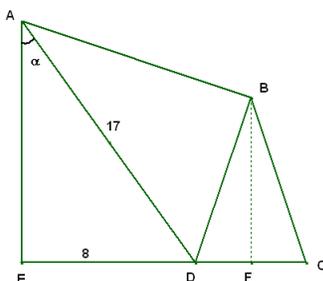
## Seminario de problemas Curso 2016-17. Hoja 7

---

42. (a) Prueba que cualquier número de la forma  $n = 6 + 7m$ , donde  $m$  es un número natural, nunca puede ser una potencia de dos.
- (b) ¿En qué cifra termina el número  $2013^{2017} + 2014^{2017} + 2015^{2017} + 2016^{2017}$ ? ¿Y el número  $2013^{2018} + 2014^{2018} + 2015^{2018} + 2016^{2018}$ ?
43. El Fútbol Club Tropezón (FCT) ha ganado la liga este año y las tiendas de deportes de Villatropez están echando humo con la venta de la equipación completa del FCT (pantaloneta y camiseta) y de los balones oficiales de la liga. Modesto, el dueño de la tienda de deportes TRIATHLON, compró cierto número de balones y la mitad de ese número de equipaciones completas. Pagó los balones a 60 euros cada uno, y 30 por cada pieza de equipación (o bien pantaloneta o bien camiseta). Para su venta al público, recargó el precio de compra en un 10 por 100. Cuando tan sólo le quedaban siete objetos por vender (entre balones, pantalonetas y camisetas, si bien pantalonetas y camisetas no se venden sueltas, siempre la equipación completa), se dio cuenta de que había recibido por los ya vendidos exactamente lo mismo que había pagado por todos ellos inicialmente. Su posible beneficio viene, pues, dado por el valor colectivo de los siete objetos restantes. ¿Cuál es ese posible beneficio?
44. En la circunferencia de centro  $A$  y radio  $r$ , el segmento  $MN$  es un diámetro. Las circunferencias pequeñas de centros  $B$  y  $C$  son tangentes entre sí, tangentes al diámetro  $MN$  y tangentes interiormente a la circunferencia grande. Hallar el radio de la circunferencia de centro  $C$ . (*Sugerencia:* Fórmula de Herón.)



45. En la figura adjunta, los triángulos  $AED$  y  $ADB$  son rectángulos y simétricos respecto del lado común  $AD$ ; además,  $BD = BC$ , donde  $C$  es un punto en la prolongación del segmento  $ED$ . Calcular el área exacta del  $\triangle BDC$  a partir de los datos  $ED = 8$  cm.,  $AD = 17$  cm.



46. Prueba que, si se colorea de uno de dos colores cada una de las aristas de un *grafo completo de 5 vértices* (es decir, el grafo formado por los vértices y todos los lados y diagonales de un pentágono), siempre habrá, o bien un triángulo monocromático, o bien un circuito pentagonal monocromático.
47. Los hermanos Golosina son cuatro muchachos muy lamineros. Una noche llegó el tío Dulce y les regaló una bolsa enorme para repartir, a partes iguales, entre los cuatro. Pero les dijo que tenían que esperar a la mañana siguiente para hacer la repartición. Así que el tío Dulce dejó la bolsa encima de una mesa y se fue. Bien entrada la noche, el hermano mayor se despertó, fue a buscar la bolsa de caramelos, hizo cuatro montones con la misma cantidad de caramelos sin que sobrase ninguno, y se llevó uno de los montones. Para disimular un poco, echó a la bolsa un caramelo de menta que llevaba en el bolsillo y que le había sobrado del día anterior. Un rato después se levantó el segundo hermano e hizo la misma maniobra: separó cuatro montones, se llevó uno de ellos, y echó en la bolsa un caramelo que le había sobrado del día anterior (que era de café con leche). Al cabo del rato, el tercer hermano se levantó e hizo lo mismo (dejando esta vez un caramelo de miel). Y al final el hermano menor también se levantó y realizó la misma acción, pero esta vez no tenía ningún caramelo sobrante en el bolsillo para echarlo en la bolsa. Al día siguiente se levantaron los cuatro hermanos y fueron corriendo a la bolsa. Ninguno de ellos era consciente de lo que habían hecho los demás. Pacíficamente, hicieron cuatro montones exactos y se repartieron los caramelos, sin que sobrara ninguno. Sabiendo que había menos de 1000 caramelos, ¿cuántos había inicialmente en la bolsa? ¿Cuántos caramelos se llevó finalmente cada hermano?