Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 7

37. Determinar un número de cinco cifras tal que su cuadrado termine en las mismas cinco cifras colocadas en el mismo orden.

38. Hallar todos los intervalos de valores de x para los cuales

$$\cos x + \sin x > 1;$$

el mismo problema para

$$\cos x + |\sin x| > 1.$$

39. En los exámenes de segundo curso de Bachillerato de un Centro, aprueban la Física, al menos, el 70% de los alumnos; las Matemáticas, al menos, el 75%; la Filosofía, al menos, el 90%; y el Idioma, al menos, el 85%. ¿Cuántos alumnos, al menos, aprueban esas cuatro asignaturas?

40. Demostrar que cualquiera que sea el número real positivo x, se cumple

$$(1 + x^{2^n})(1 - x^{2^n}) = 1 - x^{2^{n+1}}.$$

Escribiendo las igualdades que resultan al dar a n los valores $0, 1, 2, \ldots$ y multiplicándolas, demostrar que para $0 < x < 1$ se cumple

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{k\to\infty}(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^{2^2}) \cdots (1 + x^{2^k}).$$

41. Un depósito tiene forma de prisma hexagonal regular, cuyas bases son de 1 m de lado y su altura es de 10 m. Se sitúan las aristas laterales en posición oblicua y se llena parcialmente con $9\,m^3$ de agua. El plano de la superficie libre del agua corta a todas las aristas laterales. Una de ellas queda con una parte de 2 m bajo el agua. ¿Qué parte queda bajo el agua en la arista lateral opuesta del prisma?

42. En un plano vertical se consideran los puntos A y B situados sobre una recta horizontal, y la semicircunferencia de extremos A, B situada en el semiplano inferior. Un segmento de longitud a, igual al diámetro de la semicircunferencia, se mueve de manera que contiene siempre al punto A, y que uno de sus extremos recorre la semicircunferencia dada. Determinar el valor del coseno del ángulo que debe formar ese segmento con la recta horizontal, para que su punto medio esté lo más bajo posible.