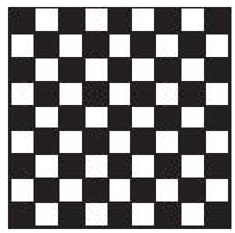
Seminario de problemas Curso 2019-20. Hoja 7

80. ¿De cuántas maneras podemos repartir 15 manzanas entre 4 estudiantes? No todos los estudiantes tienen que tener una manzana.

81. ¿De cuántas maneras podemos colocar 8 torres en un tablero de ajedrez 9x9 como el de la imagen de tal forma que no se ataquen entre sí y estén todas situadas en el mismo color?



82. Tenemos una colección de m cubos. Cada cubo de lado k, con k's distintos entre sí con $1 \leq k \leq m$. Vamos a construir una torre de acuerdo a las siguientes reglas:

- Cualquier cubo puede estar en la base de la torre.
- El cubo que esté encima de un cubo de lado k tendría de longitud de lado como mucho $k + n$.

Calcular el númmero T de torres distintas que pueden ser construidas en función de m y n.

83. Hay 10001 estudiantes en una Universidad. Algunos estudiantes se juntan para formar varios clubs (un estudiante puede pertenecer a diferentes clubs). Algunos clubs se juntan formando asociaciones (un club puede pertenecer a varias asociaciones). Hay un total de k asociaciones y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

- Cada par de estudiantes están exactamente en un club.
- Para cada estudiante en una asociación, el estudiante está exactamente en un club de dicha asociación.
- Cada club tiene un número impar de estudiantes, Además un club con $2m + 1$ estudiantes (m un entero positivo) está exactamente en m asociaciones.

Encontrar todos los posibles valores de k.

84. Para un entero positivo n, consideramos $\mathfrak{T}$ el tetraedro regular en $\mathbb{R}^3$ con vértices $O(0, 0, 0)$, $A(0, n, n)$, $B(n, 0, n)$ y $C(n, n, 0)$. Demuestra que el número de puntos reticulares (x, y, z) (aquellos puntos con coordenadas enteras x, y, z) dentro de la envoltura a $\mathfrak{T}$ es

$$N = \frac{1}{3}(n + 1)(n^2 + 2n + 3)$$