Seminario de problemas Curso 2024-25. Hoja 6

47. Probar que no existe un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(2020) = 2021$ y $P(2025) = 2024$. *Pista: usar congruencias con un módulo apropiado.*

48. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(2023)P(2024) = 2025$. Probar que no existe ningún entero k tal que $P(k) = 2024$.

49. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, de manera que existen cuatro enteros distintos a, b, c, d con $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Probar que no existe ningún entero k tal que $P(k) = 8$. *Pista: factorizar $P(x) - 5$ y evaluar en $x = k$.*

50. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que hay 3 enteros diferentes a, b, c tales que $P(a) = P(b) = P(c) = -1$. Probar que no existe ningún entero k tal que $P(k) = 0$.

51. Sean a, b enteros. Demostrar que la ecuación $(x-a)(x-b)(x-3)+1 = 0$ admite a lo sumo una solución entera.

52. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$, $P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras. *Pista: suponer lo contrario y llegar a una contradicción.*

53. Sea $w \neq 0$ un número real dado. Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$x + y + x = w, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}.$$

Pista: considera x, y, z como las raíces de un polinomio.

54. Si x, y, z satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7, \end{cases}$$

hallar el valor de $x^5 + y^5 + z^5$.

55. Sean $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ cuatro números reales. Demuestra que existen $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado dos con coeficientes reales tales que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de $P(Q(x))$ si y solamente si $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

Algunos resultados y propiedades clave sobre polinomios

1. Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Si $p(x)$ tiene una raíz racional r/s (expresada como fracción irreducible), entonces se debe cumplir que r divide a a_0 y s divide a a_n. Si además p es mónico ($a_n = 1$), las únicas posibles raíces racionales son enteras. Por ejemplo, $x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ solo puede tener raíces ± 1, ± 5 (divisores de -5).

2. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $a \equiv b \bmod m$, entonces se cumple que $P(a) \equiv P(b) \bmod m$.

3. Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos polinomios y $G(x) \neq 0$ entonces existen dos polinomios (únicos) $Q(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que $F(x) = G(x)Q(x) + R(x)$. El grado del polinomio $R(x)$ es menor que el grado de $G(x)$.

4. El resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x - r)$ es igual a $P(r)$.

5. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n y r es una raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ se puede escribir como $P(x) = (x - r)Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si los coeficientes de $P(x)$ son enteros y r es entero, entonces los coeficientes de $Q(x)$ también son enteros.

6. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n con raíces $r_1, r_2 \ldots, r_n$, entonces

$$P(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

   con C una constante.

7. Un polinomio $P(x)$ de grado n tiene exactamente n raíces reales o complejas, no necesariamente distintas.

8. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de grado n y $P(x) = Q(x)$ para más de n valores diferentes de x, entonces $P(x)$ y $Q(x)$ son el mismo polinomio.

9. Fórmulas de Cardano-Vieta.

   Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$, entonces:

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) \\
a_{n-2} &= a_n(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_1 r_n + r_2 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n) \\
a_{n-3} &= -a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n) \\
&\vdots \\
a_1 &= (-1)^{n-1} a_n(r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_{n-1} + r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_n + \cdots + r_2 r_3 \cdots r_{n-1} r_n) \\
a_0 &= (-1)^n a_n r_1 r_2 \cdots r_{n-1} r_n
\end{aligned}$$