

- 54.** Sean α, β las raíces del polinomio $x^2 - 6x + 1$. Si $r_n = \alpha^n + \beta^n$, $n \geq 0$, prueba que, para $n \geq 2$, se cumple $r_n = 6r_{n-1} - r_{n-2}$. Prueba, además, que r_n no es divisible por 5.
- 55.** Dado el polinomio $p(x) = x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$, en el que cada cuadrado $\square$ representa un hueco donde se coloca un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: alternativamente, el primer y segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero. Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.
- 56.** Calcula todos los polinomios con coeficientes reales tales que $xP(x-1) = (x-3)P(x)$.
- 57.** Sean $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ cuatro números reales. Demuestra que existen $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios de grado dos con coeficientes reales, tales que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de $P(Q(x))$ si y solamente si $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.
- 58.** Si $P(x), Q(x), R(x)$ y $S(x)$ son polinomios tales que

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)S(x),$$

demuestra que $P(x)$ es divisible por $x-1$.

- 59.** ¿Para qué valores de n el polinomio $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}$ es divisible por el polinomio $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$?
- 60.** Encuentra dos polinomios $F(x)$ y $G(x)$ tales que

$$(x^8 - 1)F(x) + (x^5 - 1)G(x) = x - 1.$$