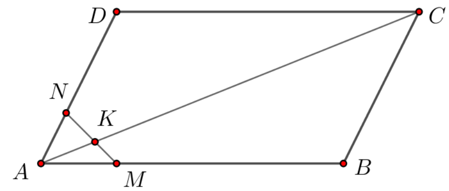
Seminario de problemas. Curso 2022-23. Hoja 6

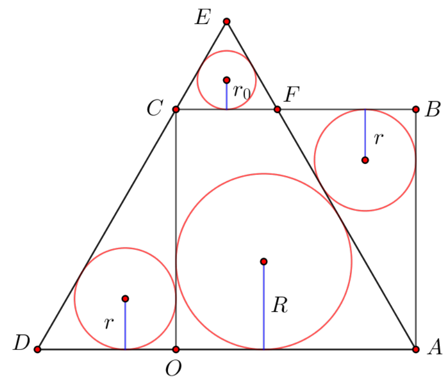


41. $ABCD$ es un paralelogramo. M y N son puntos en los lados AB y AD, respectivamente, tales que $AB = 4AM$ y $AD = 3AN$. Sea K el punto de intersección de MN y AC. Determinar la razón AC/AK.

42. Sin usar nada de cálculo de derivadas, hallar el posible rango de valores del parámetro k para que la ecuación

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = k$$

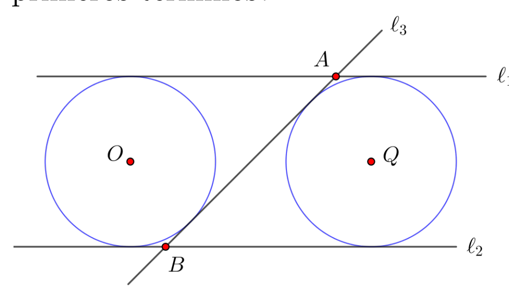
tenga cuatro soluciones distintas.



43. En el diagrama adjunto, ADE es un triángulo equilátero. Los puntos O en el segmento DA y C en el segmento ED son tales que $OABC$ es un cuadrado. Denotamos con r el radio común de las circunferencias inscritas en los triángulos CDO y AFB; con r_0 el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ECF, y con R el radio de la circunferencia tangente a las rectas OA, AF y CO. Probar que $Rr_0 = r^2$.

44. Una granjera vende todas sus ovejas, cabras y vacas (tiene varios animales de cada especie). Una persona le ofrece 100 € por oveja, 200 € por cabra y 400 € por vaca, por un total de 4700 €. Otro comprador le ofrece 135 € por oveja, 265 € por cabra y 309 € por vaca, por un total de 5155 €. ¿Cuántas ovejas, cabras y vacas tiene la granjera?

45. Consideramos la sucesión $1, 3, 2, -1, \ldots$, donde cada término es igual al precedente menos el anterior a éste. ¿Cuánto vale la suma de los 2023 primeros términos?



46. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas y sea ℓ_3 una recta secante que corta a ℓ_1 y a ℓ_2, respectivamente, en los puntos A y B. Dos circunferencias de centros O y Q están situadas entre las rectas paralelas, a uno y otro lado de la recta secante, de modo que cada una de las circunferencias es tangente a las tres rectas. Probar que $OQ = AB$.

47. Encontrar todos los polinomios $P(x)$ de coeficientes enteros no negativos que cumplen las condiciones $P(1) = 8$ y $P(2) = 2022$.

48. En un huerto circular y llano con centro en $O = (0,0)$ y radio 50 hay plantados árboles en todos los puntos de coordenadas enteras, excepto en O donde hay un mirador circular. Se supone que todos los árboles son cilíndricos, con una sección circular del mismo tamaño. Cuando los árboles sean suficientemente finos no bloquearán totalmente la vista al exterior del huerto desde el mirador central, es decir, será posible trazar alguna semirrecta desde O que no toque ni atraviese ningún árbol. Probar que ocurre esto cuando el radio de los árboles es más pequeño que $1/\sqrt{2501}$.