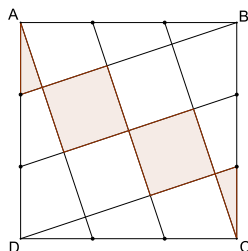


Seminario de problemas. Curso 2021-22. Hoja 6

41. Sea un cuadrado de vértices A, B, C y D . Marcamos dos puntos en cada lado del cuadrado de manera que dividan el lado en tres segmentos de la misma longitud. Los ocho puntos así obtenidos, junto con los vértices del cuadrado, se unen mediante segmentos como se ve en la figura de debajo; este procedimiento divide al cuadrado en dieciséis regiones. Se pide determinar el cociente entre el área sombreada y el área total del cuadrado.

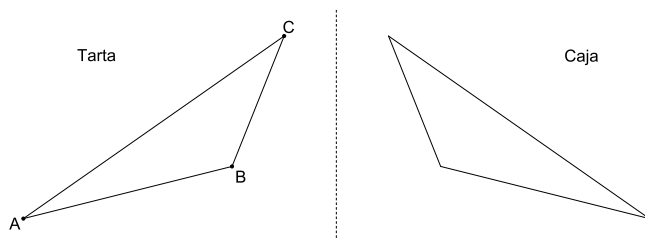


42. Demuestra que para cualesquiera ocho números reales a, b, c, d, e, f, g y h , al menos una de las sumas

$$ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh,$$

es mayor o igual que cero.

43. Sea $f(x) = x^2 + bx + c$ un polinomio de grado dos. Supongamos que la ecuación $f(f(x)) = 0$ tiene cuatro raíces reales distintas, y que dos de ellas suman -1 . Demostrar que $c \leq -1/4$.
44. Encontrar una función f tal que $f(x) + xf(1-x) = x^2$ para todo número real x .
45. Un excéntrico pastelero ha horneado una tarta con forma de triángulo escaleno ABC . Desafortunadamente, la fábrica encargada del montaje de la caja en la que se transporta la tarta ha cometido un error; la ha montado de tal forma que la caja es simétrica a la forma de la tarta, como se ve en la figura. La pregunta que se hace el pastelero es clara, ¿se puede cortar la tarta de tal forma que al volver a unirla de manera distinta, ésta encaje perfectamente en la caja?



46. Sean $ABCD$ y $DEFG$ dos rectángulos tales que el vértice E pertenece al lado AD , el vértice G pertenece al lado CD y el vértice F es el incentro del triángulo ABC . ¿Cuál es el cociente entre las áreas de los rectángulos $ABCD$ y $DEFG$?

