<u>Seminario de problemas. Curso 2016-17. Hoja 6</u>

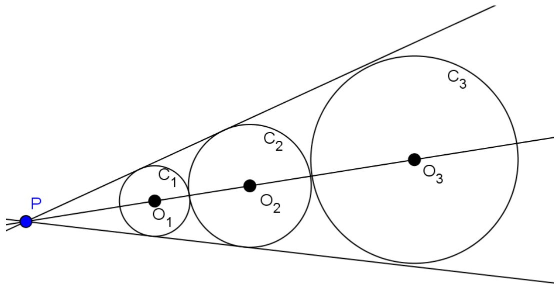
35. Sin ingenios informáticos, calcular la cifra que precede a la fila final de ceros en 25! . (Recuerda: 25! = 1· 2 · 3 · 4 · ··· · 24 · 25)

36. Encontrar las soluciones reales de la ecuación $(x+y)^2 = (x+1)(y-1)$ **.**

37. Sea *p* un número primo mayor que 5. Demostrar que $p-4$ no puede ser la cuarta potencia de un entero.

38. Sean *a, b* y *c* números reales no nulos tales que $a+b+c=0$ y $a^3+b^3+c^3=a^5+b^5+c^5$. Probar que $a^2+b^2+c^2=\frac{6}{5}$.

39. Una familia de circunferencias $C_1, C_2, C_3, \ldots$ con centros en respectivos $O_1, O_2, O_3, \ldots$ son tangentes a dos semirrectas concurrentes en P y, a su vez, (ver figura) cada una de ellas es tangente exterior a sus circunferencias contiguas. Se pide:



a) Demostrar que las longitudes de los sucesivos radios r_1, r_2, $r_3 \ldots$ están en progresión geométrica

b) Siendo $d_n = PO_n$, hallar el valor que ha de tomar el cociente r_n / d_n para que sea igual a *k* la razón de la progresión geométrica de los sucesivos radios.

c) Si las semirrectas concurrentes forman un ángulo de 60º, ¿cuál será la razón de dicha progresión geométrica?

40. Las diagonales del trapecio ABCD se cortan en el punto P. Trazamos por P una paralela a las bases AB y CD que corta a los lados oblicuos AD y BC en los puntos E y F respectivamente. Se pide:

a) Demostrar que EP = PF

b) Demostrar que EF es la media armónica de AB y DC.

(Es decir: demostrar que $\frac{1}{EF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{DC}\right)$)

41. Sean *a, b, c* y *S* respectivamente las longitudes de los lados y el área de un triángulo acutángulo ABC. Demostrar que si *P* es un punto interior al triángulo ABC tal que $a \cdot PA + b \cdot PB + c \cdot PC = 4S$, entonces *P* es el ortocentro del triángulo ABC.