

Seminario de problemas Curso 2020-21. Hoja 6

33. ¿Cuántas ternas ordenadas de números naturales (a, b, c) distintos de la unidad hay tales que $a \cdot b \cdot c = 7^{39}$?
34. ¿Cuál es el número máximo de vértices de un polígono regular de 21 lados que podemos elegir para que, al trazar todos los segmentos que los unen entre sí, no haya dos con la misma longitud?
35. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, probar que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$.
36. Por turno, en orden alfabético, tres amigos lanzan un dado. Quien saque un 6 en primer lugar gana lo apostado. Por cada euro que apueste Guti, ¿qué cantidad han de poner JuanMi y Víctor para equilibrar el juego y lograr que sea equitativo, es decir, para que las expectativas de ganancia sean las mismas para los tres colegas y no se vean afectadas por el orden de actuación al lanzar el dado?
37. En un tablero de damas (8×8) , colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?
38. Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden el mismo eje, Demostrad que el triángulo es acutángulo.
39. Sea M un punto interior del segmento AB . Se construyen cuadrados $AMCD$ y $BEHM$ en el mismo lado de AB . Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados, probar que:
1. los puntos B , N y C están alineados.
 2. el punto H es el ortocentro del triángulo ABC .
40. Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia. Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca. Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción. Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?
41. Se pide encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.