

Seminario de problemas Curso 2018-19. Hoja 6

54. Tenemos una caja con forma de prisma recto de altura 40 cm y base un triángulo equilátero de lado 60 cm. Introducimos en ella 5 partículas, que hay que pensar que son como puntos, que se mueven al azar por la caja. Demuestra que, en cualquier momento que observemos las partículas dentro de la caja, habrá al menos dos partículas que disten entre sí no más de 50 cm.
55. Se consideran 7 puntos en un rectángulo 3×4 . Demuestra que siempre hay dos de ellos a distancia menor o igual que $\sqrt{5}$. Demuestra que esto sigue siendo cierto cuando se consideran 6 puntos.
56. Prueba que existe un entero positivo n tal que $n\sqrt{\pi}$ difiere del entero más próximo menos de $\frac{1}{2019}$.
57. Se consideran 55 enteros positivos tales que $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{55} \leq 100$. Prueba que siempre podemos encontrar dos de ellos que se diferencian en 9, dos que se diferencian en 10, dos en 12 y otros dos en 13. Sin embargo, no podemos asegurar que haya dos que se diferencien en 11.
58. A cada uno de los vértices de un cubo le asignamos un 1, o un -1 . Después asignamos a cada una de las caras el producto de los números de sus vértices. ¿Puede hacerse la asignación inicial de manera que la suma de los 14 números (8 de los vértices y 6 de las caras) sea 0? Encontrar tal asignación o demostrar que no existe.
59. Partimos del número 2^{2019} . Quitamos el dígito de más a la izquierda y se lo sumamos al número que ha quedado. Repetimos el proceso hasta que nos quede un número de 10 dígitos. Prueba que que este número tiene, al menos, dos dígitos iguales.
60. En la primera fila de un tablero 2019×2019 se colocan 2019 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar una misma casilla. ¿Se puede conseguir, mediante una secuencia de movimientos, que las 2019 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?
61. Se considera el tablero 4×4 de la siguiente figura:

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

Podemos cambiar simultáneamente el signo de todas las casillas de una fila, de una columna, o de cualquier paralela a una diagonal, en particular se puede cambiar el signo de cualquiera de las cuatro esquinas. ¿Es posible conseguir que todos los elementos del tablero acaben siendo iguales a 1?