

Seminario de problemas Curso 2016-17. Hoja 5

28. Encontrar todos los números naturales tales que $10^n + 11^n + 12^n = 13^n + 14^n$.
29. Sean a, b y c las tres raíces de $x^3 - x + 1 = 0$, encontrar $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$.
30. Sean a, b, c y d números reales tales que $a + b + c + d = 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$, $abc + abd + acd + bcd = 0$. Demostrar que $a = b = c = d = 0$.
31. A cada uno de los vértices de un cubo le asignamos 1 o -1 , y asignamos a cada una de las caras el producto de los 4 números de sus vértices. ¿Podemos obtener una asignación inicial de los números en los vértices de forma que la suma de los 14 números (8 de los vértices más 6 de las caras) sea 0 ?
32. Dada $\{p_n\}_n$ la sucesión de los números primos, probar que $p_n > 2n - 1$ para $n \geq 5$.
33. ¿Se puede elegir 2016 enteros positivos distintos menores que 100000, tales que no haya tres en progresión aritmética ?
34. Y para terminar la función:
- Dada una función f con la propiedad que, para cada número real x se cumple $f(x) + f(x - 1) = x^2$. Si se cumple que $f(87) = 99$, ¿cuál es el valor de $f(99)$?
 - Existen dos funciones lineales $f(x)$ tales que $f(x + f(x)) = x$, ¿ cuál es la suma de estas dos funciones?
 - Demostrar que si la ecuación $f(x) = x$ no tiene soluciones reales, entonces $f(f(x)) = x$ tampoco las tiene (para f , una función continua).