

## Seminario de problemas Bachillerato. Curso 2013-14. Hoja 5

---

37. Prueba que, si  $m$  y  $n$  son enteros positivos primos entre sí y  $a$  y  $b$  son enteros arbitrarios, el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

tiene solución.

38. Halla el menor entero positivo que satisface el sistema de congruencias  $3x \equiv -4 \pmod{19}$ ,  $17x \equiv 35 \pmod{53}$ .
39. La relación de recurrencia  $x_n = 3x_{n-1} + 2$  define una sucesión de números a partir de un valor inicial  $x_0$ . Prueba que se puede elegir un cierto valor entero para  $x_0$  de modo que  $x_{100}$  sea divisible por 2014.
40. Encuentra el menor entero positivo  $n$  tal que, si se mueve el primero de sus dígitos decimales al final, el número que resulta es exactamente  $1.5 \cdot n$ .
41. Prueba que, en el plano cartesiano, ninguna circunferencia de centro  $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$  contiene más de un punto de coordenadas enteras.
42. Encuentra infinitos números compuestos en la sucesión 1, 31, 331, 3331, 33331, ...
43. ¿Cuál es el dígito final del número  $7^{7^{7^{\dots^7}}}$ ? (hay 2013 sietes en esta *torre* de sietes).