Seminario de problemas. Curso 2019-20. Hoja 5

63. Probad que, de entre todos los triángulos inscrito en una circunferencia, el de mayor área es el equilátero.

64. Sean a, b números reales tales que el polinomio

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1$$

tiene al menos una raíz real. Probad que

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

65. (Olimpiada Matemática Española, 2010) Sean a, b, $c > 0$. Probad que

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} + \frac{3a+b+c}{2a+3b+3c} + \frac{a+3b+c}{3a+2b+3c} \geq \frac{15}{8}.$$

66. (Olimpiada Matemática Canadiense, 1992) Probad que si x, y, z son números reales postivos, entonces

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

67. (Olimpiada Matemática Española, 2009) Sean a, b, c números positivos tales que $abc = 1$. Probad que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

68. (Olimpiada Matemática Austriaca 2006) Sean a, b, c números positivos. Probad que

$$3(a+b+c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

69. (IMO, 2008) Probad que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

para toda terna x, y, z de números reales, todos distintos de 1 que satisfacen $xyz = 1$. Probad, además, que hay infinitas ternas que satisfacen la igualdad.