

Seminario de problemas Curso 2025-26. Hoja 4

28. Se suponen conocidas las raíces reales de n ecuaciones de segundo grado, que se indican a continuación

Ecuación	Raíces
$x^2 + a_1x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2x + b_2 = 0$	x_0, x_2
$\dots$	$\dots$
$x^2 + a_nx + b_n = 0$	x_0, x_n

Encuentra, de manera razonada, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0.$$

29. Las raíces de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ son tres enteros consecutivos. Encuentra el valor máximo de $\frac{a^2}{b+1}$.
30. Sean a , b y c números reales. Prueba que, si el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene tres raíces reales, entonces $3b \leq a^2$.
31. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ prueba que, si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $a^3c = b^3$.
32. Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Se sabe que las tres raíces de P son positivas y que las raíces de Q son los inversos de las raíces de P . Prueba que $a \cdot A \geq 9$, $b \cdot B \geq 9$.
33. Prueba que, si $x, y, z \geq 0$ y $x + y + z \leq 3$, entonces $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.
34. Sean x_1 y x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, siendo m un número real. Prueba que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.
35. Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}y^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= 0, \\z^3 - 6y^2 + 12y - 8 &= 0, \\x^3 - 6z^2 + 12z - 8 &= 0.\end{aligned}$$