Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 4

19. Los puntos de una recta se colorean de rojo o azul. Probar que cualquiera sea la coloración hay tres puntos del mismo color tales que uno es el punto medio de los otros dos.

20. Para cada número natural n, sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n. Hallar el menor valor de k tal que

$$s(k) = s(2k) = \cdots = s(2015k).$$

21. Demostrar que para cualesquiera números reales a, b, c, distintos dos a dos, se cumple

$$\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a}\right) \frac{a+b}{a-b}\,\frac{b+c}{b-c}\,\frac{c+a}{c-a} < \frac{1}{4}.$$

22. Hallar todas las funciones $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tales que para todo $x > 0$, $y > 0$ se cumple

$$f\left(x\, f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = x\, f\left(\frac{1}{x+y}\right).$$

23. En un triángulo acutángulo ABC, con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz de A con BC y sea D el pie de la altura desde A a BC. Si E y F son las intersecciones de la circunferencia circunscrita a AVD con CA y AB, respectivamente, mostrar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

24. Sea ABC un triángulo y sean

$$l_a := \frac{v_a}{w_a}, \quad l_b := \frac{v_b}{w_b}, \quad l_c := \frac{v_c}{w_c},$$

donde v_a, v_b, v_c son las longitudes de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C, respectivamente y w_a, w_b, w_c son respectivamente las longitudes de las bisectrices interiores de los correspondientes ángulos prolongadas hasta la circunferencia circunscrita al triángulo. Probar que

$$\frac{l_a}{\operatorname{sen}^2 A} + \frac{l_b}{\operatorname{sen}^2 B} + \frac{l_c}{\operatorname{sen}^2 C} \geq 3.$$