Seminario de problemas Curso 2020-21. Hoja 4

20. Probar que no existe un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(2016) = 2017$ y $P(2021) = 2020$.

21. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(2018)P(2019) = 2021$. Probar que no existe ningún entero k tal que $P(k) = 2020$.

22. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 y sean $a \geq 1$ y $b \geq 1$ números reales distintos verificando

$$P(a) = P(1-a), \qquad P(b) = P(1-b).$$

Probar que $P(x) = P(1-x)$ para todo número real x.

23. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que hay 3 enteros diferentes a, b, c tales que $P(a) = P(b) = P(c) = -1$. Probar que no existe ningún entero k tal que $P(k) = 0$.

24. Si x, y, z satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7, \end{cases}$$

hallar el valor de $x^5 + y^5 + z^5$.

25. El polinomio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, con coeficientes enteros, tiene n raíces enteras distintas $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Probar que si el máximo común divisor de cada par de raíces es 1 ($\mathrm{mcd}(r_j, r_k) = 1$, $j \neq k$, es decir las raíces son primos entre sí dos a dos), entonces $\mathrm{mcd}(a_0, a_1) = 1$.

Algunos resultados y propiedades clave sobre polinomios

1. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $a \equiv b \bmod m$, entonces se cumple que $P(a) \equiv P(b) \bmod m$.

2. Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos polinomios y $G(x) \neq 0$ entonces existen dos polinomios (únicos) $Q(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que $F(x) = G(x)Q(x) + R(x)$. El grado del polinomio $R(x)$ es menor que el grado de $G(x)$.

3. El resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x - r)$ es igual a $P(r)$.

4. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n y r es una raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ se puede escribir como $P(x) = (x - r)Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si los coeficientes de $P(x)$ son enteros y r es entero, entonces los coeficientes de $Q(x)$ también son enteros.

5. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n con raíces $r_1, r_2 \ldots, r_n$, entonces
$$P(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$
con C una constante.

6. Un polinomio $P(x)$ de grado n tiene exactamente n raíces reales o complejas, no necesariamente distintas.

7. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de grado n y $P(x) = Q(x)$ para más de n valores diferentes de x, entonces $P(x)$ y $Q(x)$ son el mismo polinomio.

8. Fórmulas de Cardano-Vieta.
Si $P(x) = z_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - -r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$, entonces:
$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) \\
a_{n-2} &= a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_1r_n + r_2r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n) \\
a_{n-3} &= -a_n(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n) \\
&\vdots \\
a_1 &= (-1)^{n-1}a_n(r_1r_2\cdots r_{n-2}r_{n-1} + r_1r_2\cdots r_{n-2}r_n + \cdots + r_2r_3\cdots r_{n-1}r_n) \\
a_n &= (-1)^n r_1r_2\cdots r_{n-1}r_n
\end{aligned}$$