

## Seminario de problemas Curso 2019-20. Hoja 4

---

50. Se toman 5 puntos en los vértices de una cuadrícula. Prueba que siempre hay dos de ellos de manera que su punto medio es también en un vértice de la cuadrícula.
51. Los puntos del plano se colorean con dos colores. Prueba que podemos encontrar dos puntos del mismo color a distancia 1. Prueba que, si se usan tres colores, también existen dos puntos del mismo color a distancia 1.
52. Prueba que si se eligen  $n + 1$  números distintos entre 1 y  $2n$ , siempre podemos encontrar dos que son primos entre sí.
53. Prueba que, dados 1011 enteros cualesquiera, siempre podemos encontrar dos de ellos de manera que o bien su suma o bien su diferencia es múltiplo de 2019.
54. Dados 1011 números enteros diferentes entre 1 y 2019, prueba que siempre hay tres de ellos tales que uno de ellos es la suma de los otros dos.
55. Inicialmente, 7 de los vértices de un cubo están etiquetados con un 0 y el octavo con un 1. Podemos incrementar en una unidad la etiqueta de dos vértices unidos por una arista. ¿Es posible que, al cabo de una serie de incrementos, todas las etiquetas sean múltiplo de 5?
56. Según una leyenda, inicialmente el universo estaba vacío y, cada segundo, o bien se crean dos estrellas o desaparece una. Después de  $3^{2019}$  segundos, ¿puede el universo tener exactamente  $3^{673} + 1$  estrellas?
57. En la pizarra están escritos los números del 1 al 2019. Por turno, se eligen dos de ellos,  $a$  y  $b$ , y se reemplazan por  $ab + a + b$ . Después de hacer esto 2018 veces, ¿se puede saber qué número quedará escrito en la pizarra?
58. Tenemos, inicialmente, la terna de números  $(3, 4, 12)$ . Ahora, podemos elegir dos números de la terna  $a$ ,  $b$  y reemplazarlos por  $0.6a - 0.8b$  y  $0.8a + 0.6b$ . Después de un número adecuado de pasos, ¿es posible llegar a alguna de estas dos situaciones?
1. La terna de números  $(4, 6, 12)$ .
  2. Una terna  $(x, y, z)$  que verifique que  $|x - 4| < 1/\sqrt{3}$ ,  $|y - 6| < 1/\sqrt{3}$ ,  $|z - 12| < 1/\sqrt{3}$ .