

Seminario de problemas Curso 2023-24. Hoja 3

Principio del palomar: Si distribuimos n palomas en m nidos, y $n > m$, entonces algún nido tiene más de una paloma.

Principio del palomar generalizado: Si distribuimos $km + n$ palomas en m nidos, y $n \geq 1$, entonces algún nido tiene al menos $k + 1$ palomas.

25. Prueba que, en un equipo de fútbol, hay dos jugadores que cumplen años el mismo día de la semana y que, cuando se enfrentan con un rival, entre los dos equipos, son al menos 4 los jugadores que cumplen años el mismo día de la semana.
26. En un cajón hay calcetines de color amarillo, azul y rojo. ¿Cuántos calcetines hay que sacar, como máximo, para asegurar que hay 4 del mismo color?
27. Si escribimos 1001 números al azar en una pizarra, prueba que hay dos cuyas tres últimas cifras coinciden.
28. Elegimos 7 números distintos entre 1 y 11. Prueba que hay dos de ellos cuya suma es igual a 12.
29. Dados cualesquiera 7 números enteros, prueba que siempre hay tres de ellos que difieren uno de otro en un múltiplo de 3.
30. Prueba que existen dos potencias de 7 cuya diferencia es divisible por 2023.
31. Prueba que, si elegimos 1013 números diferentes entre 1 y 2024, entonces hay dos que son consecutivos, dos cuyo máximo común divisor es igual a uno y dos de tal manera que uno divide al otro.
32. Reordenamos los números $1, 2, 3, \dots, n$ y obtenemos la lista de números a_1, a_2, \dots, a_n . Si n es impar, prueba que el producto $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ es un número par, sin importar cuál sea la reordenación que hayamos hecho.
33. Tenemos 7 segmentos de longitudes entre 1 y 10 centímetros. Prueba que hay tres de ellos con los que se puede formar un triángulo.
34. Prueba que, dados 6 puntos en el interior de un círculo de radio uno, siempre hay dos cuya distancia es menor que uno.
35. Si coloreamos los puntos del plano de rojo o de azul, prueba que siempre podemos encontrar dos del mismo color separados una distancia de dos centímetros.
36. Si coloreamos los puntos del plano de rojo o de azul, prueba que siempre hay un triángulo equilátero con los vértices del mismo color.