Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 3

22. Si $1/13 = 0.a_1a_2 \ldots a_n \ldots$, ¿cuánto vale la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2021}$?

23. Encuentra todos los números enteros x, entre 10 y 99, ambos incluidos, tales que el resto de dividir x^3 entre 100 es igual al cubo de la cifra de las unidades.

24. Un número M tiene la propiedad de que si x e y son números positivos que cumplen $2x + 3y \leq M$, entonces también $x \cdot y \leq M$. Encuentra el mayor valor posible de M.

25. ¿Existe algún número natural n para el que se verifique $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2020} = \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$?.

26. Encuentra todos los pares (x, y) de números enteros (pueden ser negativos) tales que $x^2 + y^2 = 35(x + y)$.

27. En un tablero de ajedrez 8×8, ¿cuántos rectángulos (y cuadrados) distintos se pueden formar juntando un número entero de casillas? Por ejemplo, en un tablero 2×2, hay cuatro rectángulos 1×1, otros cuatro 2×1 y uno 2×2. En total 9 posibles rectángulos diferentes.

28. Los semicírculos de la figura son iguales y tangentes, de manera que las prolongaciones de los diámetros también son tangentes a los semicírculos. Si $AB = CD = 2$, encuentra el valor de AD y exprésa en la forma $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.