13. Demostrar que si $a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales positivos, entonces

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$$

14. Si $N = a_0 + 1000\cdot a_1 + 1000^2\cdot a_2 \ldots + 1000^n\cdot a_n$, $S = a_0 - a_1 + a_2 \ \ldots + \left(-1\right)^n\cdot a_n$ y cada coeficiente a_k es entero ($0\leq k\leq n$):
    a) Demostrar que N y S son congruentes respecto al módulo 1001 (tienen el mismo resto al dividirlos por 1001).
    b) Deducir de ello un criterio de divisibilidad para 7, 11 o 13 y aplicarlo al número 186236745823691615.

15. La ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$, $c\neq 0$ tiene tres raíces reales distintas en progresión geométrica y cuyos inversos pueden ordenarse de modo que formen progresión aritmética. Hallar b y c en función de a.

16. En un juego están tres personas A, B y C que lanzan sucesivamente en el orden A, B, C un dado. La primera persona que saque un 6, gana:
    a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?
    b) Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente anteriores.

17. Se consideran los lados del pentágono, hexágono y decágono regulares, inscritos en una misma circunferencia de radio R. Demuéstrese que el triángulo cuyos lados son los de esos tres polígonos es un triángulo rectángulo.

18. Se sabe que una elección, para la que hay dos candidatos A y B, ha terminado con el resultado de 9 votos a favor de A y 6 votos a favor de B. Calcula la probabilidad de que durante el escrutinio de los votos siempre haya ido por delante el candidato A.