

## Seminario de problemas Bachillerato. Curso 2013-14. Hoja 3

---

21. Prueba que cualquier poliedro tiene dos caras con el mismo número de aristas.
22. Prueba que, dado un conjunto cualquiera  $C$  formado por diez números enteros positivos menores que 100, siempre hay dos subconjuntos disjuntos de  $C$  que tienen la misma suma. Por ejemplo, en el conjunto  $C = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$  tenemos los subconjuntos  $\{14, 63\}$  y  $\{35, 42\}$  con la misma suma 77; también tienen la misma suma los subconjuntos  $\{3, 9, 14\}$  y  $\{26\}$ .
23. Un médico que está haciendo pruebas de un medicamento da instrucciones a un paciente de control para tomar 48 comprimidos en un periodo de 30 días. El paciente tiene libertad total para distribuirse él mismo la medicación con tal de que tome cada día al menos un comprimido y termine las 48 pastillas en el plazo de los 30 días. Prueba que, independientemente de la opción del paciente, habrá un conjunto de días consecutivos durante los cuales el número de comprimidos tomados será 11.
24. La base de una pirámide es un polígono convexo de 9 lados. Cada una de las diagonales de la base y cada una de las aristas laterales de la pirámide se pintan de color rojo o azul. No se pintan los lados de la base. Prueba que hay tres segmentos del mismo color que forman un triángulo.
25. Para  $n > 1$ , se colocan  $2n$  piezas del juego de damas en los centros de  $2n$  de las casillas de un tablero  $n \times n$ . Prueba que hay cuatro piezas que forman los vértices de un paralelogramo. ¿Es cierto esto si en vez de  $2n$  colocamos  $2n - 1$  piezas en el mismo tablero?
26. Escogemos un conjunto de 101 números distintos de entre los números del 1 al 200. Prueba que entre los números elegidos hay dos, tales que uno es múltiplo del otro.
27. Se escriben en una línea, pero en cualquier orden, los números  $1, 2, \dots, n^2 + 1$ . Prueba que, cuando se lee la lista de izquierda a derecha siempre encontraremos una sucesión creciente de longitud mayor o igual que  $n + 1$  o una sucesión decreciente de longitud mayor o igual que  $n + 1$ . Por ejemplo, cuando  $n = 3$ , la lista 6, 5, 9, 3, 7, 1, 2, 8, 4, 10 contiene la sucesión decreciente 6, 5, 3, 1 de longitud cuatro (y, en este caso, también las sucesiones crecientes de longitud cuatro 3, 7, 8, 10 y 1, 2, 4, 10).
28. Un cuadrado de lado 1 contiene varios círculos en su interior. La suma de las longitudes de las circunferencias de los círculos es 10. Prueba que hay una recta paralela a uno de los lados del cuadrado que corta al menos a cuatro círculos.