Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 2

Decimos que dos números enteros a y b son *congruentes módulo* n, y escribimos

$$a \equiv b \mod n,$$

si a y b dejan el mismo resto al dividirlos por n.

Si $a \equiv c \mod n$ y $b \equiv d \mod n$ entonces

$$\begin{aligned} a + b &\equiv c + d \mod n \\ a - b &\equiv c - d \mod n \\ a \times b &\equiv c \times d \mod n \end{aligned}$$

- Sea p un número primo y n un entero no divisible por p. Si para dos enteros a y b se cumple $na \equiv nb \mod p$ entonces $a \equiv b \mod p$.
- Sea p un número primo y a un entero no divisible por p entonces $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
- Sea p un número primo y a un entero cualquiera entonces $a^p \equiv a \mod p$.
- Si $a \equiv b \mod n$ entonces $a - b$ es divisible por n y $a = kn + b$ para algún entero k.
- Si p es un primo y p divide al producto ab entonces o a es divisible por p o b es divisible por p.

8. Prueba que $2^n + 6 \cdot 9^n$ es múltiplo de 7 para todo entero $n \geq 0$.

9. Prueba que si $a \equiv b \mod 3$ entonces $\frac{2}{3}(a^2 + ab + b^2)$ se puede escribir como la suma de tres cuadrados.

10. Encuentra el resto de dividir 2^{100} por 101. ¿Cuál sería el de dividir 3^{102} por 101?

11. Si n no es divisible por 17 prueba que entonces o bien $n^8 - 1$ o $n^8 + 1$ es divisible por 17.

12. Prueba que $300^{3000} - 1$ es divisible por 1001 y que $7^{120} - 1$ es divisible por 143.

13. Si $a + b + c$ es divisible por 30, prueba que también $a^5 + b^5 + c^5$ es divisible por 30.

14. ¿Puede ser alguno de los números 11, 111, 1111, 11111, $\ldots$, la potencia quinta de algún número natural?

15. Si p es un primo distinto de 3, prueba que el número $11 \cdots 11$ (p unos) no es divisible por p. Si, además, $p > 5$ entonces $11 \cdots 11$ ($p - 1$ unos) es divisible por p.

16. Si N y N^2 terminan en la misma secuencia de cuatro dígitos $abcd$ y $a \neq 0$, ¿cuáles son estos cuatro dígitos?

17. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $2^n + 3^n$ no puede ser nunca un cubo.