Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 2

15. ¿De cuántas maneras distintas se puede trazar un camino que dé lugar a la palabra MATEMATICAS en el siguiente triángulo de letras?

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{M}\\
\mathrm{M\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ M\ E\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ M\ A\ M\ E\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ C\ I\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ C\ A\ C\ I\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M}\\
\mathrm{M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ C\ A\ S\ A\ C\ I\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M}
\end{array}
$$

16. Un conjunto de dos millones de puntos está completamente contenido en un círculo de radio R. ¿Existe alguna recta que deje exactamente a cada lado de ella un millón de puntos?

17. a) ¿A qué es igual la suma $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$?

b) Prueba que $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n - 1)$.

18. Si m y n son números naturales y $n > 2$, prueba que $2^m + 1$ nunca puede ser divisible por $2^n - 1$.

19. La sucesión de números enteros a_1, a_2, a_3, $\ldots$ satisface que $a_{n+1} = a_n^2 + 8084$ para $n \geq 1$. Demuestra que existe como mucho un n para el que a_n es un cubo perfecto.

20. Un rectángulo $a \times b$ *cabe en* un rectángulo $c \times d$ si, o bien $a \leq c$ y $b \leq d$, o bien $a \leq d$ y $b \leq c$. Por ejemplo, un rectángulo 1×5 cabe en un rectángulo 6×2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de 2021 rectángulos cuyos lados son todos ellos números enteros entre 1 y 2020 inclusive. Prueba que hay tres rectángulos A, B y C en $\mathcal{S}$ tales que A cabe en B y B cabe en C.

21. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto en AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

a) Prueba que $\angle BPC = 90°$.

b) Sean Q el punto medio de BC y R el otro punto de intersección del segmento AD con la circunferencia circunscrita al triángulo ABQ. Prueba que los puntos B, P, R y C son concíclicos (están sobre la misma circunferencia).