Seminario de problemas   Curso 2015-16.   Hoja 2

7. Sea r un número real tal que $\sqrt[3]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{r}}=3$. Determinar el valor de $r^3+\dfrac{1}{r^3}$.

8. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $x+y+z+xyz=xy+yz+zx+4$.

9. Demostrar que un entero n puede expresarse como suma de dos cuadrados perfectos si y sólo si $2n$ puede expresarse como suma de dos cuadrados perfectos.

10. a) Demostrar que en todo pentágono regular, la razón entre las medidas de una diagonal y el lado es $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo).

b) Al trazar las cinco diagonales de un pentágono regular obtenemos en su interior otro pentágono regular. Hallar en función de Φ la razón de semejanza entre ambos pentágonos regulares.

11. Siendo a, b y c números reales positivos, demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

12. Sea AC la diagonal más grande de un paralelogramo ABCD. Desde C se trazan las perpendiculares a AB y AD. Sean E y F los pies de estas perpendiculares. Demostrar que

$$\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=(\overline{AC})^2$$