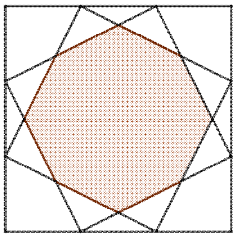
Seminario de problemas. Curso 2019-20. Hoja 2-Geometría 1.

21. Un trapecio *ABCD* está inscrito en una circunferencia de radio *R*. La base mayor es *AB=a*, la base menor *CD=b* y el ángulo $\widehat{CAB}=30^{\circ}$. Demuestra que $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-ab}{3}}$

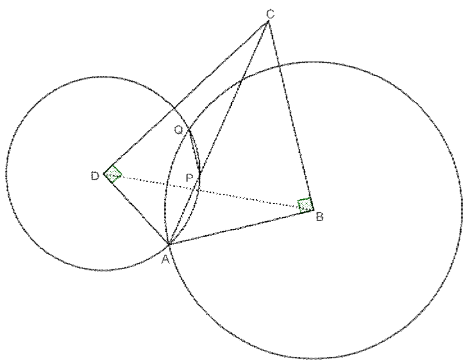
22. En un paralelogramo *ABCD*, sea *M* el punto del lado *BC* tal que *MC=2BM* y sea *N* el punto del lado *CD* tal que *NC=2DN*. Si la distancia del punto *B* a la recta *AM* es 3, calcula la distancia del punto *N* a la recta *AM*.

23. La figura muestra dos cuadrados iguales superpuestos dentro de un cuadrado mayor. Los vértices de los cuadrados pequeños dividen cada uno de los lados del cuadrado más grande en tres partes iguales. Si el área de la región sombreada es 50, halla el área del cuadrado mayor.



24. Un trapecio isósceles *ABCD* tiene de bases *AB* y *CD*, con *AB=6* , *AD=5* y $\widehat{DAB}=60^{\circ}$. Se lanza un rayo de luz desde *A* que rebota en *CB* en el punto *E* interseca a *AD* en el punto *F*. Si *AF=3*, calcula el área del triángulo *AFE*.

25. Sea un cuadrilátero *ABCD* donde los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son rectos. La circunferencia de centro *D* y radio *DA* corta al segmento *AC* en el punto *P* y a la circunferencia de centro *B* y radio *BA* en el punto *Q*. Demuestra que *PQ* es perpendicular a *AB*.



26. Demuestra que el área del mayor triángulo 30º-60º-90º situado dentro del cuadrado unidad es mayor que 1/3.

27. Una circunferencia es tangente en los puntos *A* y *B* a los lados de un ángulo con vértice en el punto *O*. En la circunferencia, en el interior del triángulo *AOB*, se toma un punto *C*. Sabiendo que las distancias de *C* a las rectas *OA* y *OB* son respectivamente *p* y *q*, halla la distancia de *C* a la cuerda *AB*.

28. Sea *ABC* un triángulo acutángulo con $AB<AC$, en el que *AD* es la altura correspondiente al vértice *A*, *O* es el circuncentro y *M* y *N* los puntos medios de los lados *BC* y *AB* respectivamente. La recta *AO* corta a la recta *MN* en *X*. Demuestra que el segmento *DX* es paralelo a *OC*.

29. En el triángulo acutángulo *ABC*, la longitud de la altura *AP* es *h*, la longitud de la mediana *AM* es *m*. Se sabe que en la bisectriz *AN* el punto *N* es el punto medio del segmento *MP*. Demuestra que la distancia del vértice *A* al ortocentro del triángulo (*H*) es: $AH = \dfrac{m^2 - h^2}{2h}$

30. Sea *ABCD* un cuadrilátero cíclico y *P* un punto cualquiera de su circunferencia circunscrita. Si *x, y, z* y *t* son las distancias de *P* a las rectas *AB, BC, CD* y *DA* respectivamente, demuestra que $x \cdot z = y \cdot t$

31 En un triángulo acutángulo *ABC*, sean d_a, d_b, d_c las distancias del circuncentro a los lados *BC, CA* y *AB* respectivamente. Demostrar que $d_a + d_b + d_c = r + R$, donde *r* y *R* son los respectivos radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo *ABC*.

32. Por los puntos medios de dos lados de un triángulo *ABC* trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.