Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 20

132. Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera la cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC. Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la circunferencia.

133. Si a, b, c son lados de un triángulo de área (ABC), probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}(ABC).$$

134. Probar que para cualesquiera números reales a, b tales que $0 < a, b < 1$ se cumple

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}.$$

135. Hallar el menor entero positivo n tal que sus cuatro divisores más pequeños satisfacen

$$d_1 < d_2 < d_3 < d_4, \quad \text{y} \quad n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

136. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que para todo $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ verifican las condiciones siguientes:

$$f(x, x) = x, \quad f(x, y) = f(y, x),$$
$$(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y), \tag{1}$$

donde $\mathbb{N}$ representa el conjunto de números naturales $\{1, 2, \ldots\}$.

137. Determinar todos los números enteros $n \geq 2$ tales que existen enteros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cumpliendo la condición si $0 < i < n$, $0 < j < n$, y n divide a $2i + j$, entonces $x_i < x_j$.

138. Sea n un entero positivo. En cada una de las n cajas tenemos una cantidad no negativa de piedras. En cada movimiento está permitido coger dos piedras de una caja, eliminar una de esas piedras y la otra piedra ponerla en otra caja. Una configuración de piedras en las cajas se dice soluble si con los movimientos permitidos es posible alcanzar, en un número finito (posiblemente cero) de movimientos, una configuración de piedras con ninguna caja vacía. Determinar todas las configuraciones iniciales de piedras que no son solubles, pero se convierten en solubles después de poner una piedra en una caja, cualquiera sea la caja que se elija.