

Seminario de problemas. Curso 2018–19. Hoja 1 (Congruencias)

- 9.** En 1776 se firmó la Declaración de independencia de Estados Unidos. ¿Sabrías calcular con cuántos ceros termina 1776!? Recuerda que $n! = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$. Por cierto, si multiplicas por cuatro el resultado deberías obtener el año en que se intentó llevar a cabo el primer censo moderno en España, el censo del Conde de Aranda.
- 10.** Encuentra algún número entero cuyo producto por 1961 (año de construcción del Muro de Berlín) deje de resto 1989 (año de la caída de dicho muro) al ser dividido por 3921 (¿año del fin del mundo?).
- 11.** ¿Sabrías calcular el resto de dividir $2018^{2017} + 2017^{2018}$ entre 3? ¿Y entre 9?
- 12.** Prueba que, para cualquier número entero n , $3n^5 + 5n^3 + 7n$ es siempre divisible por 15.
- 13.** Los años 2017 y 2018 tienen algo en común ya que $2017 = 9^2 + 44^2$ y $2018 = 13^2 + 43^2$. Es decir, ambos son suma de dos cuadrados perfectos. ¿Sucederá lo mismo en 2019?
- 14.** Un maestro de educación infantil le cuenta por teléfono a su hija, estudiante de matemáticas, que por la mañana había pasado unas horas horneando galletas de muchas formas y sabores para niños de su clase.
- Usé los 11 moldes y los 6 aromas que tenemos en casa, pero no calculé bien y al final no había la misma cantidad de galletas de cada forma ya que sobraban 4, y tampoco había la misma cantidad de cada sabor ya que sobraban 5. Para colmo quería haberles dado 3 galletitas a cada uno de los 20 niños pero me han faltado. Eso sí, les han encantado –le comenta el padre venido a repostero.
- ¡Qué pobre! Estarías muy cansado después de haber horneado esas 59 galletitas –le responde su hija, dejando a su padre agradablemente sorprendido.
- ¿Hubieses sabido calcular la cantidad de galletas que preparó el simpático maestro?

Seminario de problemas. Curso 2018–19. Hoja 1 (Congruencias)

15. Observa que 5 divide a $2^2 + 1$ y a $3^2 + 1$. Encuentra todos los números enteros positivos d para los cuales existe algún número entero n de modo que d divide a $n^2 + 1$ y a $(n+1)^2 + 1$.
16. Prueba que, para todo número natural n , $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es divisible por 14. ¿Sabes calcular el resto de dividir ese número entre 13 si $n = 1897$? Por cierto, en 1897 la Asamblea general de Indiana discutió el proyecto de ley número 246 en el que se proponía fijar por ley el valor del número π como 3,2. Afortunadamente no se aprobó, pues de haberlo hecho, hoy sería un delito en dicho estado usar valores para π tales como 3,14 o 3,14159.
17. Prueba que si en un triángulo rectángulo las longitudes de sus tres lados son números naturales entonces el producto de ellas es múltiplo de 30. ¿Lo es también de 60?
18. Al separar la cifra de las unidades en 261 obtenemos la pareja (26, 1). En general, al separar la cifra de las unidades d de las demás en un número n obtendremos una pareja (n', d) . Prueba que n es divisible por 29 si y solamente si $n' + 3d$ lo es. Comprueba, usando el criterio anterior, que 1914, año de inicio de la Primera guerra mundial, es divisible por 29.
19. Sea n un número entero no negativo. Prueba que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ queda dividido por algún número del conjunto $\{3, 5, 13\}$.
20. Prueba que no existen enteros positivos a, b, c tales que $4ab - a - b = c^2$.