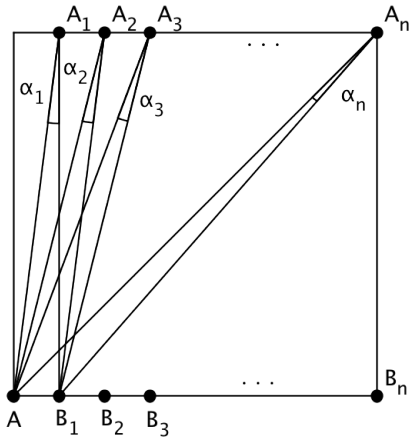
Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 19

109. Probar que ningún número triangular escrito en base 7 termina en ninguna de las cifras $\{2, 4, 5\}$.

110. Dado un cuadrado en el que la longitud del lado es 1 metro, dividimos dos lados paralelos en n segmentos iguales cada lado. Cada uno de los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que son los extremos de la derecha de cada uno de los segmentos en uno de los lados, son a su vez vértices de un triángulo con base AB_1 (ver figura). Se pide:

1. Hallar la suma de las áreas de los triángulos AA_1B_1, AA_2B_1, $\ldots$, AA_nB_1.
2. Hallar la suma de los ángulos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, donde $\alpha_j = \angle AA_jB_1$ (ver figura).



111. N monedas están en una mesa, $N-1$ de ellas son oficiales o genuinas y tienen el mismo peso, y una es falsa, con un peso diferente. Usando una balanza de dos platos, el objetivo es determinar cuál es la moneda falsa y si es más ligera o pesada que las monedas oficiales. Siempre que se pueda deducir que una o varias monedas son oficiales, ellas serán inmediatamente descartadas y no se podrán utilizar en nuevas pesadas. Determinar los valores de N para los cuáles se puede lograr nuestro objetivo (no existen limitaciones sobre cuantas veces se puede utilizar la balanza).

112. Demuestra que el número de ceros que tiene en total el número

$$A = 123456 \cdots 1\,000\,000\,000$$

que se obtiene al escribir uno tras otro, en el sistema de numeración decimal, todos los números naturales del 1 al 10^9, es igual al número de dígitos del número

$$B = 123456 \cdots 100\,000\,000$$

que se obtiene al escribir uno tras otro, en el sistema de numeración decimal, todos los números naturales del 1 al 10^8.

113. Considerando la suma

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)},$$

expresar S_{2015} como una fracción irreducible.